

**ΘΕΜΑ 1**

Δίνονται τα σημεία  $B(-\alpha, 0)$ ,  $\Gamma(\alpha, 0)$ , ( $\alpha > 0$  σταθερός αριθμός )  
και οι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f, g$ , με  $f(x)g(x) \neq 0$  για κάθε  
 $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν

- $f(g(x))g(f(y)) = 1$  ( 1 ), για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$
- Κάθε μία από τις  $C_f, C_g$  έχει μόνο ένα κοινό σημείο

$A(\rho, \rho)$ ,  $\rho > 0$ , με την ευθεία  $(\varepsilon): y = x$

- ( ε 1 ) Να μελετήσετε το πρόσημο των  $f, g$
- ( ε 2 ) Να αποδείξετε ότι  $f(g(x)) = g(f(x))$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- ( ε 3 ) Έστω  $M(x, f(x))$  τυχαίο σημείο της  $C_f$ , αν το εμβαδόν του  
 $BM\Gamma$  είναι σταθερό, τότε να βρείτε τους τύπους των  $f, g$
- ( ε 4 ) Έστω  $\Pi(x)$  η περίμετρος του τριγώνου  $BM\Gamma$  του ( ε 3 )  
τότε να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό  $\kappa$  υπάρχει  
ένα τουλάχιστον  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ώστε  $\Pi(x_0) > \kappa$

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$ , με  $f(x) = \sqrt{x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x + 1}$

και  $g$ , με  $g(x) = x^2 + x + 1$  και σύνολα τιμών  $R_f, R_g$

- ( ε 1 ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
- ( ε 2 ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f, C_g$
- ( ε 3 ) Να αποδείξετε ότι  $R_f \subseteq R_g$

- ( ε 4 ) Να αποδείξετε ότι  $6 \int_0^1 f(x) dx > 11$

**ΘΕΜΑ 3**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \Delta = (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη στο  $\Delta$

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  εφάπτεται στον άξονα  $x'x$
- (ε 3) Να συγκρίνεται τους αριθμούς  $\alpha = \ln 10^{19}$  και  $\beta = \ln(9^{19}e^2)$

**ΘΕΜΑ 4**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = x^4 - 1$  και η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(1) = 0 \text{ και } g'(1) = 4$$

- (ε 1) Να αποδείξετε ότι  $x^2 f''(x) = 12f(x) + 12$
- (ε 2) Να βρείτε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις  $C_{f'}$  και  $C_{f''}$
- (ε 3) Να βρείτε το πλήθος των κοινών εφαπτόμενων των  $C_{f'}$ ,  $C_{f''}$
- (ε 4) Αν  $x^2 g''(x) = 12g(x) + 12$ , τότε να βρείτε τον τύπο της  $g$

**ΘΕΜΑ 5**

Η συνάρτηση  $f : \Delta = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο  $\Delta$

$f^{(3)}(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$ , άξονας  $x'x$  δεν είναι οριζόντια ασύμπτωτη των

$$C_f, C_{f'}, C_{f''} \text{ και } f(x)f'(x)f''(x) = 18x^6 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

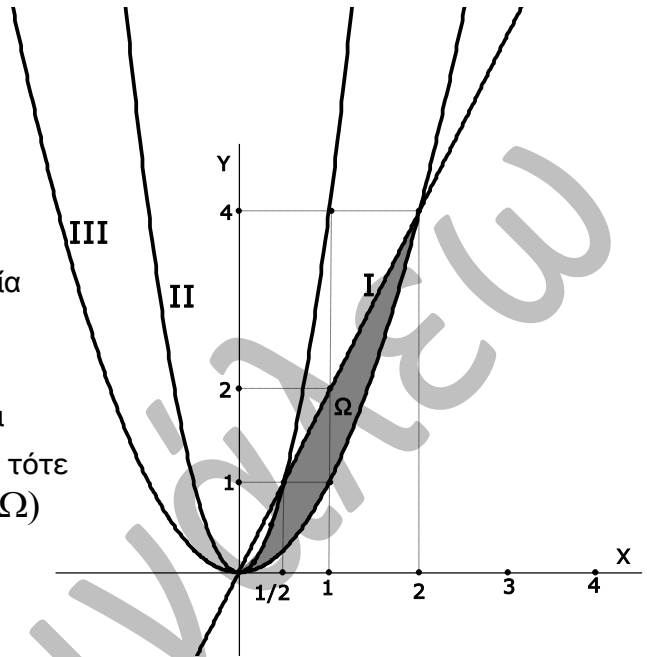
- (ε 1) Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν έχει ούτε ακρότατα και ούτε σημεία καμψής
- (ε 2) Να αποδείξετε ότι η  $f'$  δεν έχει ούτε ακρότατα και ούτε σημεία καμψής
- (ε 3) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα
- (ε 4) Αν επιπλέον η  $f$  είναι πολυωνυμική με ακέραιους μη αρνητικούς συντελεστές και  $f''(1) = 2f'(1) = 6f(1)$ , τότε να βρείτε τον τύπο της  $f$

**ΘΕΜΑ 6**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες  
στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f, g$ .

Οι γραμμές I, II, III είναι οι  
γραφικές παραστάσεις των  
συναρτήσεων  $f, g, fog$

- (ε 1) Να αντιστοιχίσετε κάθε μία  
από τις  $f, g, fog$  στη  
γραφική της παράσταση
- (ε 2) Αν η μία από τις  $f, g$  είναι  
η παράγωγος της άλλης, τότε  
να βρείτε το εμβαδόν  $E(\Omega)$   
του γραμμοσκιασμένου  
χωρίου  $\Omega$



**ΘΕΜΑ 7**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$ , με  $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$  και  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

- (ε 1) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$  και της  $C_g$
- (ε 2) Να συγκρίνετε τις τιμές  $f(7), g(7)$
- (ε 3) Να μελετήσετε τις  $f, g$  ως προς τη μονοτονία
- (ε 4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\rho \in (0, +\infty)$  ώστε  $\rho^3 = 2^\rho \ln \rho$   
( $e \approx 2,7$ )

**ΘΕΜΑ 8**

Δίνεται η άρτια συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$   
Η  $C_f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επιπλέον ισχύουν

- Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα και  $f'(1) = 2$
- $(f'(x))^2 = 2f(x)f''(x) + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

- (ε 1) Να αποδείξετε ότι η  $f''$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία
- (ε 3) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα
- (ε 4) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

**ΘΕΜΑ 9**

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  
 $2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$  (1)

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα  
 $\rho \in (-1, 0)$

(ε 2) Να βρείτε το σύνολο τιμών  $f(\mathbb{R})$

(ε 3) Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ε 4) Να αποδείξετε ότι  $6f(x) \leq 6x + 1$

(ε 5) Να αποδείξετε ότι  $2 \int_0^1 f(x) dx < 3$

**ΘΕΜΑ 10**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \Delta = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(-1) = f(0) = f(1)$  και  $f'(x) = (e^{x^3-x} - 1)f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$

Να βρείτε τον τύπο της  $f$

**ΘΕΜΑ 11**

Δίνονται η συνάρτηση  $f : \Delta = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(-1) = f(0) = f(1)$  και  $f'(x) = (x^3 - x)f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$

**ΘΕΜΑ 12**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

$f(1) = f''(1)$ ,  $f(0) + f'(0) = 0$ ,  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e-1}{e}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ισχύει ότι  $(f'(x))^2 = f(x)f''(x)$ . Να βρείτε τον τύπο της  $f$

**ΘΕΜΑ 13**

Δίνεται η μη σταθερή και παραγωγίσιμη στο 0 (μηδέν)

συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι

$f(x+y) = f(x)f(y)$  (1), για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

(ε 3) Αν η ευθεία  $(\varepsilon) : y = 2x + 1$  εφάπτεται στη  $C_f$

τότε να βρείτε τον τύπο της  $f$

**ΘΕΜΑ 14**

Δίνεται η μη σταθερή και παραγωγίσιμη στο 1 συνάρτηση  $f: \Delta = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει ότι

$f(xy) = f(x)f(y)$  (1), για κάθε  $x, y \in \Delta$  και η ευθεία

$(\varepsilon): y = 3x - 2$  εφάπτεται στη  $C_f$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$

(ε 3) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$

(ε 4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία

(ε 5) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα

**ΘΕΜΑ 15**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}$ ,  $A_f = [-1, +\infty)$

(ε 1) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ε 2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία

(ε 3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα

(ε 4) Να αποδείξετε ότι  $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13} + \sqrt{14}} < \frac{5}{\sqrt{12} + \sqrt{13}} + \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{14} + \sqrt{15}}$

**ΘΕΜΑ 16**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \Delta = [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν

•  $\kappa f'(x)f''(x) = (f(x))^2$  (1), για κάθε  $x \in \Delta$ ,  $\kappa > 0$

•  $f(0) = 1 = f''(0)$

• Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ μια ρίζα στο  $\Delta$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η  $f'$  είναι "1-1"

(ε 2) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία

Αν ευθεία  $(\varepsilon): y = x + 1$  εφάπτεται στη  $C_f$  στο σημείο με

τετμημένη  $x_0 = 0$ , τότε

(ε 3) Να αποδείξετε  $f(x) > x$ , για κάθε  $x \in \Delta$

και να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

(ε 4) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$

**ΘΕΜΑ 17**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$

και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύουν  $f(x) \neq 0$ ,  $f(x)f'(x) = f''(x)$  (1)

Να υπολογίσετε το  $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$

**ΘΕΜΑ 18**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \Delta = [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με συνεχή παράγωγο

στο  $\Delta$ ,  $f'(0) = 1$  και  $e^x f(x) = (f'(x))^2 \neq 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$

**ΘΕΜΑ 19**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \Delta = [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με συνεχή  $f^{(3)}$  στο  $\Delta$

για την οποία επιπλέον ισχύουν

- $f^{(3)}(0) = f''(0) = f'(0) = 1$
- $f^{(3)}(x) \geq f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$
- $f'(x)f(x) = (f^{(3)}(x))^2 \neq 0$  (1), για κάθε  $x \in \Delta$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$

**ΘΕΜΑ 20**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν

- $f''(0) - 2 = 0 = f'(0) = f(0)$
- $f(x)f'(x)f''(x) = 4x^3$  (1), για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

(ε 1) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

(ε 2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

(ε 3) Αν  $f''(x) \leq 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε να βρείτε τον τύπο της  $f$