1 ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-2\beta x+2}{x-1}$, για την οποία ισχύουν • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και • $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-1$

(β1) Να αποδείξετε $\alpha=1=\beta$ και $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}$ (Μονάδες 06)

(β2) Να αποδείξετε $f^{//}(x)=2(f(x)-x+1)(1-f^{/}(x))$ (Μονάδες 05)

(β3) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη 2 και τηνεξίσωση της ευθείας (η) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^{/}$ στο σημείο της με τετμημένη 2 (Μονάδες 04)

(β4) Να βρείτε τα σημεία τομής B,Γ της ευθείας (η) με την ευθεία (ε) και τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν ο άξονας $x'x$ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$ (Μονάδες 05)

(β5) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{//}(x)=f(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα (Μονάδες 05)

2 Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$ και τύπους

$$f(x)=\begin{cases} e^x+x+1 & ,x\neq 0 \\ 2 & ,x=0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} e^x+1 & ,x\neq 0 \\ 2 & ,x=0 \end{cases}$$

(β1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παράγουσα της συνάρτηση g **(Μονάδες 05)**

(β2) Να βρείτε τη θέση των C_f , C_g **(Μονάδες 05)**

(β3) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f **(Μονάδες 05)**

(β4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα **(Μονάδες 05)**

(β5) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τον άξονα $x^{/}x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$ **(Μονάδες 05)**

3 ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=\ln\frac{5-x}{x+1}$,

(β1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_{f} της συνάρτησης f **(Μονάδες 03)**

(β2) Να μελετήσετε τη . συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία **(Μονάδες 06)**

(β3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f}(x)=\rho\in\mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο A_{f} **(Μονάδες 06)**

(β4) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία εφάπτεται στην γραφική C_{f} παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ **(Μονάδες 05)**

(β5) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (η),του ερωτήματος **(β4)** με τους άξονες **(Μονάδες 05)**

4 ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=x^7+x^5+x^4+x$

Να αποδείξετε ότι

β1 . Η συνάρτηση f αντιστρέφεται

(Μονάδες 5)

β2 . $\mathrm{f}(e^x+\ln x)\le \mathrm{f}(x)$, για κάθε $x\in(0,1]$

(Μονάδες 5)

β3 . Η εφαπτομένη στη C_{f} στο σημείο $O(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας της f και της f^{-1}

(Μονάδες 5)

β4 . $\mathrm{f}^{-1}(x)\le x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

β5 . $24E(\Omega)=71$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_{f}, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=4$

1 ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(-1)x^3-\mathrm{f}(1)x+\mathrm{f}(0)$

$\mathrm{f}(0)\neq 0, \mathrm{f}(1)\neq 0, \mathrm{f}(-1)\neq 0$

Να αποδείξετε ότι

(γ1) $\mathrm{f}(-1)=\mathrm{f}(1)$ (Μονάδες 06)

(γ2) Υπάρχει $\xi_0\in(-1,1)$, ώστε $3\xi_0^2=1$ (Μονάδες 06)

(γ3) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$, ώστε $\mathrm{f}'(\xi_1)+\mathrm{f}'(\xi_2)=0$ (Μονάδες 07)

(γ4) $\xi_1^2+\xi_0^2+\xi_2^2=1$ (Μονάδες 06)

2 ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$, με

$\mathrm{f}(\mathrm{e})=\mathrm{e}=\mathrm{e}^2\mathrm{f}''(\mathrm{e})$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει :

$x^2\mathrm{f}'(x)=x\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}^2(x)+\mathrm{C}x^2$.

Να αποδείξετε ότι

(γ1) $2x\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(x)+x\mathrm{f}(x)+x^3\mathrm{f}''(x)=x^2\mathrm{f}'(x)+2\mathrm{f}^2(x)$ **(Μονάδες 5)**

(γ2) $\mathrm{f}'(\mathrm{e})\leq 0$ **(Μονάδες 5)**

(γ3) Η εξίσωση $\mathrm{f}'(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα **(Μονάδες 5)**

(γ4) $\mathrm{f}(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$ **(Μονάδες 5)**

(γ5) $\mathrm{f}(x)\ln x=x$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$ **(Μονάδες 5)**

3 ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f τρείς φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$

F παράγουσα της f, $\mathrm{f}^{(3)}(x)\neq 0$ και τα γ,δ, με $\alpha<\gamma<\delta<\beta$,

για τα οποία ισχύει $\mathrm{f}(\gamma)<\mathrm{f}(\alpha)=0=\mathrm{f}(\beta)<\mathrm{f}(\delta)$

Να αποδείξετε ότι

γ1 . Η συνάρτηση f έχει αρνητική ελάχιστη τιμή και θετική μέγιστη τιμή **(Μονάδες 5)**

γ2 . Η δεύτερη παράγωγος της f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο **(Μονάδες 5)**

γ3 . Η συνάρτηση f έχει μόνο ένα σημείο καμπής **(Μονάδες 5)**

γ4 . Η συνάρτηση f δέχεται δυο τουλάχιστον εφαπτόμενες παράλληλες στον $x'x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(Μονάδες 5)**

γ5 . Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, ώστε

$(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)\mathrm{F}''(x_1)\mathrm{F}''(x_2)=\mathrm{F}'(\gamma)\mathrm{F}'(\delta)$ **(Μονάδες 5)**

4 Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=\alpha\sqrt{x}+\frac{1}{\beta\sqrt{x}}$, $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$

(γ1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία **(Μονάδες 5)**

(γ2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **(Μονάδες 5)**

(γ3) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα **(Μονάδες 5)**

Αν επιπλέον ισχύει ότι $3\mathrm{f}(\alpha)+2\mathrm{f}(\beta)=10\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, τότε να αποδείξετε

(γ4) $4\leq 2\mathrm{f}(x)\leq 5$, για κάθε $x\in[1,4]$ **(Μονάδες 5)**

(γ5) $2\int_1^4 \mathrm{f}^3(x)\mathrm{d}x+20<5\int_1^4 \mathrm{f}^2(x)\mathrm{d}x+8\int_1^4 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$ **(Μονάδες 5)**

1 ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή τρίτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και τα σημεία της $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ με τετμημένες $\mathrm{X}_{\mathrm{A}}=1,\mathrm{X}_{\mathrm{B}}=2,\mathrm{X}_{\Gamma}=3$ και το σημείο B είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{A}\Gamma$ και

$\mathrm{f}^{//}(0)\mathrm{f}^{//}(4)>0$

Να αποδείξετε ότι

(δ1) $2\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(3)$ (Μονάδες 07)

(δ 2) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον ευθείες $(\eta),(\theta)$ οι οποίες εφάπτονται στη γραφική παράσταση C_{f} της συνάρτησης f και είναι παράλληλες στην $\mathrm{A}\Gamma$ (Μονάδες 07)

(δ 3) Υπάρχει μια τουλάχιστον ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση $\mathrm{C}_{\mathrm{f}^{/}}$ της συνάρτησης $\mathrm{f}^{/}$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ (Μονάδες 06)

(δ 4) Η εξίσωση $\mathrm{f}^{(3)}(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα (Μονάδες 05)

2 ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\mathrm{f}(\mathrm{f}^{/}(x))=x\mathrm{f}^{/}(\mathrm{f}^{/}(x))=4x^2+\mathrm{C}\ ,\mathrm{C}\geq 0$

Να αποδείξετε ότι

(δ1) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ (Μονάδες 03)

(δ2) Η συνάρτηση f είναι κυρτή (Μονάδες 06)

(δ3) $2\mathrm{f}(\ln\sqrt{8})<\mathrm{f}(\ln 2)+\mathrm{f}(\ln 4)$ (Μονάδες 05)

(δ4) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)$ (Μονάδες 06)

(δ5) Αν επιπλέον η $\mathrm{f}^{/}$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και $\mathrm{f}^{/}(1)=2$ τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f (Μονάδες 05)

3 Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$2g^{//}(x)-g^{/}(x)-g(x)=x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,η ευθεία (ε)

Εφάπτεται στη C_g στο $x_0=0$ και $g(0)=1=g^{/}(0)+1$

(δ1) Να αποδείξετε ότι $g(x)=e^x-x$ (Μονάδες 05)

(δ2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g (Μονάδες 03)

(δ3) Να μελετήσετε την g , ως προς την κυρτότητα (Μονάδες 03)

(δ4) Να υπολογίσετε το $I=\int_1^0 2xg(2-x^2)dx$ (Μονάδες 04)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,κάθε μια από τις γραμμές **(α)** , **(β)** , **(γ)** του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας μόνο μιας εκ των συναρτήσεων $f, f^{/}, f^{//}$

(δ5) Να αντιστοιχίσετε κάθε μια από τις συναρτήσεις $f, f^{/}, f^{//}$ στη γραφική της παράσταση αιτιολογώντας πλήρως την απάντηση σας . (Μονάδες 06)

(δ6) Αν $f=g$ τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω του σχήματος (Μονάδες 04)