ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα σημεία $B(-\alpha,0)$, $\Gamma(\alpha,0)$, ($\alpha>0$ σταθερός αριθμός) και οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g ,με $f(x)g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

- $f(g(x))g(f(y))=1$ **(1)** , για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
- Κάθε μία από τις C_f, C_g έχει μόνο ένα κοινό σημείο $A(\rho,\rho)$, $\rho>0$,με την ευθεία $(\varepsilon): y=x$

(ε 1) Να μελετήσετε το πρόσημο των f,g

(ε 2) Να αποδείξετε ότι $f(g(x))=g(f(x))$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε 3) Έστω $M(x,f(x))$ τυχαίο σημείο της C_f, αν το εμβαδόν του $BM\Gamma$ είναι σταθερό , τότε να βρείτε τους τύπουςτων f,g

(ε 4) Έστω $\Pi(x)$ η περίμετρος του τριγώνου $BM\Gamma$ του **(ε 3)** τότε να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό κ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $\Pi(x_0)>\kappa$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και δεν μηδενίζονται

Άρα διατηρούν σταθερό πρόσημο και $f(\rho)=g(\rho)=\rho>0$

Οπότε $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε 2) Από την **(1)** $\Rightarrow f(g(x))=C_1 \Rightarrow g(f(y))=C_2$

$f(g(\rho))=C_1 \Rightarrow f(\rho)=C_1 \Rightarrow \rho=C_1>0$

$g(f(\rho))=C_2 \Rightarrow g(\rho)=C_2 \Rightarrow \rho=C_2>0$, οπότε $\rho^2=1\Rightarrow\rho=1$

Άρα $f(g(x))=1$ και $\Rightarrow g(f(y))=1 \overset{y=x}{\Rightarrow} g(f(x))=1$, τελικά

$f(g(x))=g(f(x))$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε 3) $(BM\Gamma)=\alpha d \Rightarrow f(x)=d \overset{x=1}{\Rightarrow} d=1 \Rightarrow f(x)=1 \Rightarrow g(x)=1$

(ε 4) Είναι $\Pi(x)=\sqrt{(x+\alpha)^2+1}+\sqrt{(x-\alpha)^2+1}+2\alpha$

Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\Pi(x)-\kappa$, φ συνεχής στο $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, οπότε υπάρχει πολύ μεγάλος θετικός αριθμός x_0

ώστε $\varphi(x_0)>0 \Rightarrow \Pi(x_0)>\kappa$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$, οπότε υπάρχει πολύ μικρός αρνητικός αριθμός x_0

ώστε $\varphi(x_0)>0 \Rightarrow \Pi(x_0)>\kappa$