ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

01. Δύο συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού $\mathrm{A_f}, \mathrm{A_g}$
δεν είναι ίσες όταν $\mathrm{A_f} \neq \mathrm{A_g}$ **ή** όταν $\mathrm{A_f} = \mathrm{A_g} = \mathrm{A}$
και υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $x \in \mathrm{A}$ ώστε $\mathrm{f}(x) \neq \mathrm{g}(x)$

02.
- Όταν μια συνάρτηση f **δεν είναι γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ , σημαίνει ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ώστε να ισχύει $\mathrm{f}(x_1) \geq \mathrm{f}(x_2)$
- Όταν μια συνάρτηση f **δεν είναι γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ, σημαίνει ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ώστε να ισχύει $\mathrm{f}(x_1) \leq \mathrm{f}(x_2)$

03. Κάθε ευθεία (ε) παράλληλη στον άξονα $\mathrm{y'y}$ τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , το πολύ σε ένα σημείο. (αλλιώς δεν είναι συνάρτηση)

04. Όταν μια συνάρτηση f είναι $''1-1''$ στο πεδίο ορισμού της Δ **ή** γνησίως μονότονη στο Δ και ισχύει $\mathrm{f}(\alpha) = \mathrm{f}(\beta)$
τότε $\alpha = \beta$

05. Κάθε ευθεία (ε) παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τη γραφική παράσταση μιας $''1-1''$ (ή μιας γνησίως μονότονης) συνάρτησης f , το πολύ σε ένα σημείο.

06. Όταν μελετάμε μια συνάρτηση ως προς το $''1-1''$ τη μελετάμε στο πεδίο ορισμού της

07. Όταν μελετάμε μια συνάρτηση ως προς τη μονοτονία τη μελετάμε κατά διαστήματα

08. Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της A, τότε είναι και $''1-1''$ στο A, **ενώ** αν η f είναι $''1-1''$ στο A δεν είναι κατ' ανάγκη γνησίως μονότονη στο A

09. Έστω συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A. Αν για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in A$, με $\alpha<\beta<\gamma$, ισχύει ότι $(f(\alpha)-f(\beta))(f(\beta)-f(\gamma))>0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο A

ενδεικτική απάντηση

- Αν $f(\alpha)-f(\beta)>0$, τότε και $f(\beta)-f(\gamma)>0$, οπότε $f(\alpha)>f(\beta)$ και $f(\beta)>f(\gamma)$, άρα $f \searrow$ στο A
- Αν $f(\alpha)-f(\beta)<0$, τότε και $f(\beta)-f(\gamma)<0$, οπότε $f(\alpha)<f(\beta)$ και $f(\beta)<f(\gamma)$, άρα $f \nearrow$ στο A

10. Έστω συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A και $\beta,\gamma \in \mathrm{A}$, με $\beta<\gamma$ και ο αριθμός $\lambda=\mathrm{f}(\gamma)-\mathrm{f}(\beta)$ ((β,γ) τυχαία),τότε

(α) Όταν $\lambda>0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A

(β) Όταν $\lambda<0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο A

(γ) Όταν $\lambda=0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο A

ενδεικτική απάντηση

(α) $\lambda>0 \Rightarrow \mathrm{f}(\gamma)>\mathrm{f}(\beta) \Rightarrow \mathrm{f} \nearrow$ στο A

(β) $\lambda<0 \Rightarrow \mathrm{f}(\gamma)<\mathrm{f}(\beta) \Rightarrow \mathrm{f} \searrow$ στο A

(γ) $\lambda=0 \Rightarrow \mathrm{f}(\gamma)=\mathrm{f}(\beta) \Rightarrow \mathrm{f}$ σταθερή στο A

11. Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f,g τέτοιες , ώστε

$\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=0$,για κάθε $x \in \Delta$

12. Όταν $\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=0$,για κάθε $x \in \Delta$, **δε σημαίνει** ότι

$\mathrm{f}(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $\mathrm{g}(x)=0$, για κάθε $x \in \Delta$

παράδειγμα

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases} 0 & ,x \in \mathrm{A} \\ x^2 & ,x \in \mathbb{R}-\mathrm{A} \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} e^x & ,x \in \mathbb{R}-\mathrm{A} \\ 0 & , \quad x \in \mathrm{A} \end{cases}$$

$\mathrm{f}(x)g(x)=0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- **Αν όμως** $\mathrm{f}(x_0)\mathrm{g}(x_0)=0$,τότε $\mathrm{f}(x_0)=0$ ¨ή $\mathrm{g}(x_0)=0$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ και ΣΥΝΘΕΣΗ

13. Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ με $f(\alpha)<f(\beta)$, τότε $\alpha<\beta$
(αν f είναι γνησίως φθίνουσα τότε $\alpha>\beta$)

14. Η συνάρτηση f, είναι γνησίως αύξουσα (ή γν.φθίνουσα) σ'ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα (ή γνησίως αύξουσα) στο Δ

15. Οι συναρτήσεις f , g είναι γνησίως αύξουσες (ή γνησίως φθίνουσες), σ'ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ **ή** γνησίως φθίνουσα στο Δ

ενδεικτική απάντηση

Έστω $\alpha,\beta\in\Delta$, με $\alpha<\beta$, τότε $f(\alpha)<f(\beta)$ και

$g(\alpha)<g(\beta)$, οπότε $f(\alpha)+g(\alpha)<f(\beta)+g(\beta)\Rightarrow$

$\Rightarrow(f+g)(\alpha)<(f+g)(\beta)$, άρα $f+g\nearrow$ στο Δ

(όμοια $f+g$ γνησίως φθίνουσα στο Δ)

16. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) σ'ένα διάστημα Δ και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα (ή γνησίως αύξουσα), στο Δ τότε η συνάρτηση $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ **ή** γνησίως φθίνουσα στο Δ (Η απόδειξη όμοια με **15**)

17. Οι συναρτήσεις f , g είναι γνησίως αύξουσες, σ'ένα διάστημα Δ και παίρνουν θετικές (ή αρνητικές) τιμές , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ (ή γνησίως φθίνουσα στο Δ)

ενδεικτική απάντηση

- Έστω $\alpha,\beta \in \Delta$, με $\alpha < \beta$, τότε $0 < f(\alpha) < f(\beta)$ και $g(\alpha) < g(\beta) < 0$,οπότε $f(\alpha)g(\alpha) > f(\beta)g(\beta) \Rightarrow$ $\Rightarrow (f \cdot g)(\alpha) < (f \cdot g)(\beta)$, άρα $f \cdot g \nearrow$ στο Δ
- Έστω $\alpha,\beta \in \Delta$, με $\alpha < \beta$, τότε $f(\alpha) < f(\beta) < 0$ και $g(\alpha) < g(\beta) < 0$,οπότε $0 < f(\alpha)g(\alpha) < f(\beta)g(\beta) \Rightarrow$ $\Rightarrow (f \cdot g)(\alpha) > (f \cdot g)(\beta)$, άρα $f \cdot g \searrow$ στο Δ

18. Οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως **αύξουσες** και ορίζεται η $g\mathrm{o}f$, τότε η συνάρτηση $g\mathrm{o}f$ είναι γνησίως αύξουσα

ενδεικτική απάντηση

Έστω $\alpha,\beta \in \Delta$, με $\alpha < \beta \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\alpha) < f(\beta) \overset{g\nearrow}{\Rightarrow}$

$\overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(f(\alpha)) < g(f(\beta)) \Rightarrow (g\mathrm{o}f)(\alpha) < (g\mathrm{o}f)(\beta)$, άρα

$g\mathrm{o}f \nearrow$

19. Οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες και ορίζεται η gof , τότε η συνάρτηση gof είναι $\nearrow$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $\alpha, \beta \in \Delta$, με $\alpha < \beta \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \overset{g \searrow}{\Rightarrow}$

$\overset{g \searrow}{\Rightarrow} g(f(\alpha)) < g(f(\beta)) \Rightarrow (gof)(\alpha) < (gof)(\beta)$, άρα $gof \nearrow$

> Όταν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και ορίζεται η fof , τότε η fof είναι γνησίως αύξουσα.

20. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα (ή αύξουσα) και ορίζεται η gof , τότε η συνάρτηση gof είναι $\searrow$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $\alpha, \beta \in \Delta$, με $\alpha < \beta \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(\alpha) < f(\beta) \overset{g \searrow}{\Rightarrow}$

$\overset{g \searrow}{\Rightarrow} g(f(\alpha)) > g(f(\beta)) \Rightarrow (gof)(\alpha) > (gof)(\beta)$, άρα $gof \searrow$

21. Όταν $(\mathrm{fof})(x)=x$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε $\mathrm{f}(x)=x$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $\mathrm{f}(x)\neq x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ ώστε τότε $\mathrm{f}(\rho)\neq\rho$, αν $\mathrm{f}(\rho)<\rho \xRightarrow{\mathrm{f}\nearrow} \mathrm{f}(\mathrm{f}(\rho))<\mathrm{f}(\rho)\Rightarrow \rho<\mathrm{f}(\rho)$, **άτοπο** , όμοια αν $\mathrm{f}(\rho)>\rho$. Οπότε $\mathrm{f}(x)=x$

22. Όταν $(\mathrm{fof})(x)=x$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή στο $\mathbb{R}$, τότε $\mathrm{f}(x)=-x$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $\mathrm{f}(x)\neq -x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ ώστε τότε $\mathrm{f}(\rho)\neq-\rho$, αν $\mathrm{f}(\rho)<-\rho \xRightarrow{\mathrm{f}\searrow} \mathrm{f}(\mathrm{f}(\rho))>\mathrm{f}(-\rho)\Rightarrow$ $\xRightarrow{\text{περιττη}} \mathrm{f}(\mathrm{f}(\rho))>-\mathrm{f}(\rho)\Rightarrow -\rho<\mathrm{f}(\rho)$, **άτοπο** , όμοια αν $\mathrm{f}(\rho)>-\rho$., Οπότε $\mathrm{f}(x)=-x$

ΑΡΤΙΕΣ - ΠΕΡΙΤΤΕΣ

23. Κάθε συνάρτηση f ,με συμμετρικό ως προς το 0 (μηδέν) πεδίο ορισμού A γράφεται σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

24. Μια συνάρτηση f , είναι περιττή στο πεδίο ορισμού της A και $0\in \mathrm{A}$, τότε $\mathrm{f}(0)=0$

25. Όταν μια συνάρτηση f ,είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\beta,-\alpha]$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $x_1,x_2\in[-\beta,-\alpha]$,με $-\beta<x_1<x_2<-\alpha$, τότε

$$\beta>-x_1>-x_2>\alpha \xRightarrow{\mathrm{f}\nearrow[\alpha,\beta]} \mathrm{f}(-x_1)>\mathrm{f}(-x_2) \xRightarrow{\mathrm{f}\,\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\eta}$$

$$\xRightarrow{\mathrm{f}\,\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\eta} -\mathrm{f}(x_1)>-\mathrm{f}(x_2)\Rightarrow \mathrm{f}(x_1)<\mathrm{f}(x_2)$$, άρα $\mathrm{f}\nearrow$

Στο $[-\beta,-\alpha]$.

26. Όταν μια συνάρτηση f ,είναι άρτια και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$,τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\beta,-\alpha]$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $x_1,x_2\in[-\beta,-\alpha]$,με $-\beta<x_1<x_2<-\alpha$, τότε

$$\beta>-x_1>-x_2>\alpha \xRightarrow{\mathrm{f}\nearrow[\alpha,\beta]} \mathrm{f}(-x_1)>\mathrm{f}(-x_2) \xRightarrow{\mathrm{f}\,\alpha\rho\tau\iota\alpha}$$

$$\xRightarrow{\mathrm{f}\,\alpha\rho\tau\iota\alpha} \mathrm{f}(x_1)>\mathrm{f}(x_2)$$, άρα $\mathrm{f}\searrow$ στο $[-\beta,-\alpha]$.

27. Όταν μια συνάρτηση $\mathbf{f}$, είναι περιττή και $''1-1''$ στο πεδίο ορισμού της ,τότε η f^{-1} είναι περιττή στο $f(A)$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $-x \in f(A)$,τότε υπάρχει $y \in A_f$ ώστε $f^{-1}(-x) = y$

Άρα $f(f^{-1}(-x)) = f(y) \Rightarrow -x = f(y) \Rightarrow x = -f(y) \Rightarrow$,

$\overset{f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\eta}{\Rightarrow} x = f(-y) \Rightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}(f(-y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = -y = -f^{-1}(x)$, άρα f^{-1} περιττή

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

28. Αν η ευθεία $x = \kappa$ είναι άξονας συμμετρίας της C_f μιας συνάρτησης f ,τότε $f(x) = f(2\kappa - x)$

ενδεικτική απάντηση

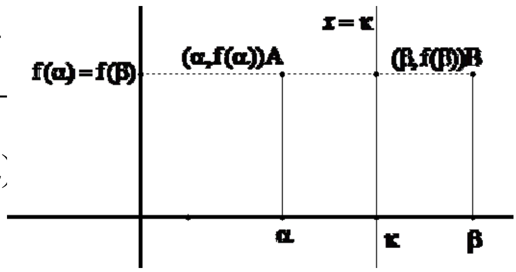
Έστω δύο τυχαία σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ της C_f συμμετρικά ως προς την ευθεία $x = \kappa$

Είναι $f(\alpha) = f(\beta)$ και

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \kappa \Rightarrow \beta = 2\kappa -$

άρα $f(\alpha) = f(2\kappa - \alpha$

$f(x) = f(2\kappa - x)$



29. Αν το σημείο $M(\kappa, \rho)$ είναι κέντρο συμμετρίας της C_f μιας συνάρτησης f ,τότε $f(x) + f(2\kappa - x) = 2\rho$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ-ΣΥΝΘΕΣΗ

30. Όταν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,τότε ισχύει η ισοδυναμία « $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=f^{-1}(x)$ ».

ενδεικτική απάντηση

- Έστω $\rho \in \mathbb{R}$ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$, τότε $f(\rho)=\rho$ άρα $f^{-1}(f(\rho))=f^{-1}(\rho) \Rightarrow f^{-1}(\rho)=\rho \Rightarrow f(\rho)=f^{-1}(\rho)$ οπότε ρ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$
- Έστω $\rho \in \mathbb{R}$ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$, τότε $f(\rho)=f^{-1}(\rho)$. Έστω $f(\rho) \neq \rho$
  - Αν $f(\rho)<\rho \Rightarrow f^{-1}(\rho)<\rho \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(\rho))<f(\rho) \Rightarrow$
    $\Rightarrow \rho<f(\rho)$ άτοπο
  - Αν $f(\rho)>\rho \Rightarrow f^{-1}(\rho)>\rho \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(\rho))>f(\rho) \Rightarrow$
    $\Rightarrow \rho>f(\rho)$ άτοπο .

  Οπότε $f(\rho)=\rho$, άρα ρ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$

31. Όταν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\Delta)$

ενδεικτική απάντηση

$x_1, x_2 \in f(\Delta)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(x_2)) \overset{f\nearrow}{\Rightarrow}$
$\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$, άρα $f^{-1}\nearrow$ στο $f(\Delta)$

32. Όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ ,τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(\Delta)$

(Η απόδειξη όμοια με την προηγούμενη)

33. Αν η συνάρτηση $g\text{o}f$ είναι $''1-1''$,τότε και η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta \subseteq A_f$, ($\Delta$: για κάθε $x \in \Delta \Rightarrow f(x) \in A_g$)

με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{g\text{o}f''1-1''}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

Οπότε η συνάρτηση f είναι $''1-1''$ στο Δ

34. Οι συναρτήσεις f, g είναι $''1-1''$ και ορίζεται η συνάρτηση $g\text{o}f$,τότε η συνάρτηση $g\text{o}f$ είναι $''1-1''$

ενδεικτική απάντηση

Έστω $x_1, x_2 \in A_{g\text{o}f}$, με $(g\text{o}f)(x_1) = (g\text{o}f)(x_2)$, οπότε

$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{g''1-1''}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f''1-1''}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

άρα η συνάρτηση $g\text{o}f$ είναι $''1-1''$ στο $A_{g\text{o}f}$

35. Όταν η συνάρτηση $g\text{o}f$ είναι $''1-1''$ και οι f, g έχουν πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,τότε και η g είναι $''1-1''$

ενδεικτική απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi = g\text{o}f$, φ $''1-1''$

$\varphi(x) = g(f(x))$, f αντιστρέψιμη , έστω f^{-1} η αντίστροφη

$\varphi(f^{-1}(x)) = g(f(f^{-1}(x))) \Rightarrow \varphi\text{o}f^{-1} = g$, άρα g $''1-1''$

36. Όταν για τη συνάρτηση $g \circ$ ισχύει $(g \text{o} f)(x) = x$,τότε

$g(x) = f^{-1}(x)$

ενδεικτική απάντηση

Η f είναι $''1-1''$ αντιστρέψιμη (από 33), έστω η αντίστροφη f^{-1}, οπότε $(g\text{o}f)(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \Rightarrow g(x) = f^{-1}(x)$

37. Όταν οι συναρτήσεις g, f είναι $''1-1''$, τότε η συνάρτηση $g\text{o}f$ αντιστρέφεται και ισχύει $(g\text{o}f)^{-1} = f^{-1}\text{o}g^{-1}$

ενδεικτική απάντηση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις G , F με $G = g\text{o}f$, $F = f^{-1}\text{o}g^{-1}$

είναι $(G\text{o}F)(x) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) = g(g^{-1}(x)) = x$

άρα η αντίστροφη της G είναι η F , οπότε $G^{-1} = F$ άρα

$(g\text{o}f)^{-1} = f^{-1}\text{o}g^{-1}$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

38. Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι :

$f(x) \pm \kappa f(\alpha - x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \neq \pm 1$

τότε μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f

παράδειγμα

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, για την οποία ισχύει ότι $f(x) + 2f(2-x) = 3x$ **(1)**, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ενδεικτική απάντηση

(1) $\overset{x \to 2-x}{\Rightarrow} f(2-x) + 2f(x) = 3(2-x)$ **(2)**, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα $f(2-x) = 3(2-x) - 2f(x) \overset{(1)}{\Rightarrow} -3f(x) + 6(2-x) = 3x$

Οπότε $f(x) = -3x + 4$

39. Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι :

$f(x) \pm \kappa f(\frac{\alpha}{x}) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \neq \pm 1$

τότε μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f

παράδειγμα

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, για την οποία ισχύει ότι $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = 3x$ **(1)**, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ενδεικτική απάντηση

Αντικαθιστούμε το x με $\frac{1}{x}$, οπότε $f(\frac{1}{x}) = 3x - 2f(x)$

αντικατάσταση στην **(1)** και βρίσκουμε τον τύπο της f

Και στις δύο περιπτώσεις **38** , **39** ελέγχουμε αν ο τύπος της f που βρίσκουμε επαληθεύει την **(1)**

40. Δίνονται οι συναρτήσεις g, f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι : $f^{\nu}(x)+f^{\nu-2}(x)=g(x)$ **(1)** για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **,** $\nu\geq 3$, ν περιττός **.**

(α) Αν η συνάρτηση g είναι **"1−1"** ,τότε και η συνάρτηση f είναι **"1−1"**

(β) Αν $g(\rho)=0$,τότε και $f(\rho)=0$

(γ) Αν η συνάρτηση g είναι περιττή ,τότε και η συνάρτηση f είναι περιττή

(δ) Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) , τότε και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα)

Παρατήρηση : «Συνήθως» η f έχει τις ιδιότητες της g

41. Δίνονται οι συναρτήσεις g, f, φ , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

- Οι g, φ είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι **:** $\varphi(f(x))+f(x)=g(x)$ **(1)**

τότε

(α) Η συνάρτηση f είναι **"1−1"**

(β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν η g είναι γνησίως φθίνουσα και η φ είναι γνησίως αύξουσα τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα