Α Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι
$\mathrm{f}^{/}(x)=g(x)$ **(1)** και $\mathrm{f}(x_0)=\alpha$ **(2)** να βρείτε
τον τύπο της. (Η g είναι γνωστή και α, x_0 γνωστά)

ΑΠ1 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι
$\mathrm{f}^{/}(x)=3x^2-4x$ **(1)** και $\mathrm{f}(0)=4$ **(2)** να βρείτε τον τύπο της f .

ενδεικτική απάντηση

$\mathrm{f}^{/}(x)=(x^3-2x^2)^{/}\Rightarrow \mathrm{f}(x)=x^3-2x^2+\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=4$,οπότε
$\mathrm{f}(x)=x^3-2x^2+\mathrm{C}$

ΑΠ2 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι
$\mathrm{f}^{/}(x)=x\mathrm{e}^x$ **(1)** και $\mathrm{f}(0)=2$ **(2)** ,να βρείτε τον τύπο της f .

ενδεικτική απάντηση

Παρατηρούμε ότι $(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)^{/}=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x$!!! !!!

οπότε $\mathrm{f}^{/}(x)=(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)^{/}\Rightarrow \mathrm{f}(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=3$
άρα $\mathrm{f}(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+3$ (είναι εύκολο πάντα να παρατηρούμε;)

ΑΠ3 παράδειγμα (απίθανο για εξετάσεις)

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $\mathrm{f}^{/}(x)=x^2\mathrm{e}^x$ **(1)**
και $\mathrm{f}(0)=2$ **(2)** ,να βρείτε τον τύπο της f .(Αόριστη ολοκλήρωμα)

ενδεικτική απάντηση

Πρόχειρο $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^2(\mathrm{e}^x)^{/}\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-\int (x^2)^{/}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$
$=x^2\mathrm{e}^x-\int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-\int 2x(\mathrm{e}^x)^{/}\mathrm{d}x=$
$=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+\int (2x)^{/}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x$

Διατύπωση Παρατηρούμε ότι $(x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x)^{/}=x^2\mathrm{e}^x$, άρα
$\mathrm{f}^{/}(x)=(x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x)^{/}\Rightarrow \mathrm{f}(x)=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+\mathrm{C}$
για $x=0\Rightarrow \mathrm{C}=0$ άρα $\mathrm{f}(x)=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x$

(εάν όμως το χρειαστείς χρεισημοποιήσε το)

ΑΠ4 παράδειγμα (παράγωγος γινομένου)

Δίνεται η συνάρτηση f και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$x\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x)=\sigma\upsilon\nu x$ **(1)** , να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

$$x\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x)=\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow (x\mathrm{f}(x))^{/}=(\eta\mu x)^{/} \Rightarrow x\mathrm{f}(x)=\eta\mu x+\mathrm{C}$$

$x\mathrm{f}(x)=\eta\mu x+\mathrm{C} \overset{x=0}{\Rightarrow} \mathrm{C}=0 \Rightarrow x\mathrm{f}(x)=\eta\mu x$, με $x \neq 0$ έχουμε

$\mathrm{f}(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$, όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1=\mathrm{f}(0)$, τελικά $\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$

ΑΠ5 παράδειγμα (παράγωγος πηλίκου)

Δίνεται η συνάρτηση f και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}(x)}{\mathrm{e}^{x}}=1$ **(1)** και $\mathrm{f}(0)=2$, να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

$$\frac{\mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}(x)}{\mathrm{e}^{x}}=1 \Rightarrow \frac{\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{e}^{x}-\mathrm{f}(x)\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}}=1 \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{e}^{x}}\right)^{/}=x^{/} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{e}^{x}}=x+\mathrm{C} \overset{x=0}{\Rightarrow} \mathrm{C}=2 \Rightarrow \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{e}^{x}}=x+2 \Rightarrow \mathrm{f}(x)=x\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{x}$$

ΑΠ6 παράδειγμα (παράγωγος δύναμης)

Δίνεται η συνάρτηση f και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}(x)=x$ **(1)** και $\mathrm{f}(0)=2$, να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

$$\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}(x)=x \Rightarrow 2\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}(x)=2x \Rightarrow (\mathrm{f}^{2}(x))^{/}=(x^{2})^{/} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathrm{f}^{2}(x)=x^{2}+\mathrm{C} \overset{x=0}{\Rightarrow} \mathrm{C}=2 \Rightarrow \mathrm{f}^{2}(x)=x^{2}+2$, f συνεχής και

$\mathrm{f}(x)\neq 0$ με $\mathrm{f}(0)=2$, άρα $\mathrm{f}(x)>0 \Rightarrow \mathrm{f}(x)=\sqrt{x^{2}+2}$

Ασκήσεις Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , όταν

A1 $\mathrm{f}'(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ και $\mathrm{f}(0)=2$ $(\mathrm{f}(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1)$

A2 $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ και $\mathrm{f}(0)=2$ $(\mathrm{f}(x)=\ln(x^2+1)+2)$

A3 $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ και $\mathrm{f}(0)=2$ $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x^2+9}-1$

A4 $\mathrm{f}'(x)=x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$ και $\mathrm{f}(0)=2$ $\mathrm{f}(x)=x\eta\mu x+2$

A5 $\mathrm{f}'(x)\sqrt{\mathrm{f}(x)}=4x$ και $\mathrm{f}(0)=1\,,\mathrm{f}(x)\geq 0$ $\mathrm{f}(x)=\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}$

A6 $\mathrm{f}'(x)=2\sqrt{\mathrm{f}(x)}\sigma\upsilon\nu x$ και $\mathrm{f}(\pi/2)=1\,,\mathrm{f}(x)\geq 0$ $(\mathrm{f}(x)=\eta\mu^2 x)$

A7 $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{f}(x)}}\,,\mathrm{f}(0)=1\,,\mathrm{f}(x)>0$ $(\mathrm{f}(x)=\sqrt[3]{(3x+1)^2})$

A8 $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{2}{x}\sqrt{\mathrm{f}(x)}\,,\mathrm{f}(1)=0\,,\mathrm{f}(x)>0$ $(\mathrm{f}(x)=(\ln x)^2)$

A9 $x\mathrm{f}'(x)-\mathrm{f}(x)=2x^3+x^2\,,x\neq 0\,,\mathrm{f}(1)=3$ $(\mathrm{f}(x)=x^3+x^2+x)$

A10 $\dfrac{1}{x}\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}'(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}\,,x\neq 0\,,\mathrm{f}(1)=-2$ $\mathrm{f}(x)=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln|x|}{x}$

A11 f ορισμένη στο $\mathrm{A_f}=[0,+\infty)$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

$2\mathrm{f}'(x)=4x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $\mathrm{f}(0)=4$

$\mathrm{f}(x)=x^2+\sqrt{x}+4$

Β Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι
$\mathrm{f}^{/}(x)+\varphi(x)\mathrm{f}(x)=g(x)$ **(1)**και $\mathrm{f}(x_0)=\alpha$ **(2)** να βρείτε τον τύπο της. (Οι φ, g είναι γνωστές και α, x_0 γνωστά)

1. Πρέπει ο συντελεστής της $\mathrm{f}^{/}$ να είναι 1(αν όχι διαίρεση)
2. Βρίσκουμε μια αρχική Φ της φ
3. Οπότε η **(1)** γίνεται $\mathrm{f}^{/}(x)+\Phi^{/}(x)\mathrm{f}(x)=g(x)$ **(3)**
4. Πολλαπλασιάζουμε την **(3)** με $\mathrm{e}^{\Phi(x)}$, οπότε
5. $\mathrm{e}^{\Phi(x)}\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{e}^{\Phi(x)}\Phi^{/}(x)\mathrm{f}(x)=g(x)\mathrm{e}^{\Phi(x)}$, άρα
6. $(\mathrm{e}^{\Phi(x)}\mathrm{f}(x))^{/}=\mathrm{A}^{/}(x)$, A αρχική της $g(x)\mathrm{e}^{\Phi(x)}$
(Για την υπολογισμό της A (σε δύσκολες περιπτώσεις χρειάζεται το αόριστο ολοκλήρωμα **)**
7. $\mathrm{e}^{\Phi(x)}\mathrm{f}(x)=\mathrm{A}(x)+\mathrm{C}$, χρησιμοποιούμε την **(2)** και υπολογίζουμε το C , οπότε
8. $\mathrm{f}(x)=\mathrm{A}(x)\mathrm{e}^{-\Phi(x)}+\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\Phi(x)}$

Β Π1 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι
$\mathrm{f}^{/}(x)+2x\mathrm{f}(x)=4x$ **(1)**και $\mathrm{f}(0)=4$ **(2)** να βρείτε τον τύπο της f .

3. $\mathrm{f}^{/}(x)+(x^2)^{/}\mathrm{f}(x)=4x$ **4** $\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{e}^{x^2}(x^2)^{/}\mathrm{f}(x)=4x\mathrm{e}^{x^2}$

6. $(x^2\mathrm{f}(x))^{/}=(2\mathrm{e}^{x^2})^{/}$

7 $\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{f}(x)=2\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=2$, άρα $\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{f}(x)=2\mathrm{e}^{x^2}+2$

8 $\mathrm{f}(x)=2+2\mathrm{e}^{-x^2}$

Β Π2 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι
$\mathrm{f}^{/}(x)-\sigma\upsilon\nu x\mathrm{f}(x)=\sigma\upsilon\nu x$ **(1)** και $\mathrm{f}(0)=2$ **(2)** να βρείτε τον τύπο της f.

3. $\mathrm{f}^{/}(x)+(-\eta\mu x)^{/}\mathrm{f}(x)=4x$

4 $\mathrm{e}^{-\eta\mu x}\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{e}^{-\eta\mu x}(-\eta\mu x)^{/}\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{-\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x$

6. $(\mathrm{e}^{-\eta\mu x}\mathrm{f}(x))^{/}=(-\mathrm{e}^{-\eta\mu x})^{/}$

7 $\mathrm{e}^{-\eta\mu x}\mathrm{f}(x)=-\mathrm{e}^{-\eta\mu x}+\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=3\Rightarrow$
$\Rightarrow\mathrm{e}^{-\eta\mu x}\mathrm{f}(x)=-\mathrm{e}^{-\eta\mu x}+3$, άρα

8 $\mathrm{f}(x)=-1+3\mathrm{e}^{\eta\mu x}$

ΒΠ3 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι
$\mathrm{f}^{/}(x)-\sigma\upsilon\nu x\mathrm{f}(x)=\sigma\upsilon\nu x$ **(1)** και $\mathrm{f}(0)=2$ **(2)**
να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}(x)=-1+3\mathrm{e}^{\eta\mu x}$ (Μπορούμε όπως στο **ΒΠ2)**

ενδεικτική απάντηση 2 Τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{f}(x)+1}{\mathrm{e}^{\eta\mu x}}$, $g(0)=-1$

(να λάβουμε υπόψη παρανομαστής διάφορος του μηδενός)

$$g^{/}(x)=-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{e}^{\eta\mu x}-(\mathrm{f}(x)+1)\mathrm{e}^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x}{\mathrm{e}^{2\eta\mu x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{/}(x)=-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}(x)\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x}{\mathrm{e}^{\eta\mu x}}\overset{(1)}{=}0\Rightarrow g(x)=\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}$$

$$\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=-1\Rightarrow g(x)=-1\Rightarrow\mathrm{f}(x)=-1+3\mathrm{e}^{\eta\mu x}$$

Σχόλιο Αν δεν βγεί συμπέρασμα με τον 2 τρόπο τότε θεωρούμε
$g(x)=\mathrm{f}(x)-1+3\mathrm{e}^{\eta\mu x}$, $g(0)=0$ τκαι προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι $g(x)=0\Rightarrow\mathrm{f}(x)=1-3\mathrm{e}^{\eta\mu x}$

ΒΠ4 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία $ef(0)-1=f(\pi/2)-e$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ξ ώστε $f'(\xi)-\sigma\upsilon\nu\xi f(\xi)=\sigma\upsilon\nu\xi$

εδώ εργαζόμαστε στο πρόχειρο όπως στο ΒΠ2 μέχρι και το **6**
Προσπαθούμε να «μαντέψουμε» συνάρτηση στην οποία
Να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το Θ Rolle

Πρόχειρο

3. $f'(x)+(-\eta\mu x)'f(x)=4x$

4 $e^{-\eta\mu x}f'(x)+e^{-\eta\mu x}(-\eta\mu x)'f(x)=e^{-\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x$

6. $(e^{-\eta\mu x}f(x))'=(-e^{-\eta\mu x})'$

Διατύπωση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=e^{-\eta\mu x}f(x)+e^{-\eta\mu x}$

Δεν είναι υποχρεωτικό να εξηγήσουμε πως βρήκαμε τη g

Η g είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $g(0)=g(\frac{\pi}{2})$ άρα ικανοποιεί Θ Rolle . . .

Άσκηση Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, όταν

Β.1 $f'(x)+\frac{3}{x}f(x)=2$, $x>0$ και $f(1)=2$ ($f(x)=x+x^{-3}$)

Β.2 $f'(x)+\frac{3}{x}f(x)=2$, $x>0$ και $f(1)=2$ ($f(x)=x+x^{-3}$)

Β.3 $2f'(x)-12xf(x)=12x$, $f(0)=1$ ($f(x)=2e^{3x^2}-1$)

Β.4 $f'(x)+e^{x}f(x)=e^{x}$, $f(0)=2$ ($f(x)=1-e^{1-e^{x}}$)

Β.5 $f'(x)+2xf(x)=f(x)+4x-2$, $f(1)=3$ ($f(x)=2+e^{x-x^2}$)

Β.6 $f''(x)+2f'(x)=6$, $f'(0)+1=4=f(1)$ ($f(x)=3x+1$)

Γ Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$\alpha \mathrm{f}''(x)+\beta \mathrm{f}(x)=0$ **(1)**, $\alpha\beta>0$ και $\mathrm{f}(\xi)=0=\mathrm{f}'(\xi)$ **(2)**

να βρείτε τον τύπο της.

$$\alpha \mathrm{f}''(x)+\beta \mathrm{f}(x)=0 \Rightarrow 2\alpha \mathrm{f}'(x)\mathrm{f}''(x)+2\beta \mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\alpha(\mathrm{f}'(x))^2]' + [\beta(\mathrm{f}(x))^2]' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\alpha(\mathrm{f}'(x))^2 + \beta(\mathrm{f}(x))^2]' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\mathrm{f}'(x))^2 + \beta(\mathrm{f}(x))^2 = \mathrm{C} \overset{x=\xi}{\Rightarrow} \mathrm{C}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\mathrm{f}'(x))^2 = \beta(\mathrm{f}(x))^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{f}(x)=0$$

ΓΠ1 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}(x)=0$ **(1)** και $\mathrm{f}(0)=0=\mathrm{f}'(0)$ **(2)** να βρείτε τον τύπο της f.

ενδεικτική απάντηση

(1) $\Rightarrow 2\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}''(x)+2\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(x)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow [(\mathrm{f}'(x))^2]' + [(\mathrm{f}(x))^2]' = 0 \Rightarrow [(\mathrm{f}'(x))^2 + (\mathrm{f}(x))^2]' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{f}'(x))^2 + (\mathrm{f}(x))^2 = \mathrm{C} \overset{x=0}{\Rightarrow} \mathrm{C}=0 \Rightarrow (\mathrm{f}'(x))^2 + (\mathrm{f}(x))^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{f}'(x))^2 = 0 = (\mathrm{f}(x))^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{f}(x)=0$$

ΓΠ2 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g''(x)+g(x)=0$ **(1)** $g(0)=0$ **(2)** και $g'(0)=1$.Να αποδείξετε ότι $g(x)=\eta\mu x$.

ενδεικτική απάντηση

Έστω f ,με $\mathrm{f}(x)=g(x)-\eta\mu x$, $\mathrm{f}(0)=0$ και $\mathrm{f}'(x)=g'(x)-\sigma\upsilon\nu x$ $\mathrm{f}'(0)=0$,είναι $\mathrm{f}''(x)=g''(x)+\eta\mu x$, άρα $\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}(x)=0$

οπότε **(ΓΠ1)** $\mathrm{f}(x)=0 \Rightarrow g(x)-\eta\mu x=0 \Rightarrow g(x)=\eta\mu x$

ΓΠ3 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g^{//}(x)+g(x)=0$ **(1)**
$g(0)=1$ **(2)** και $g^{/}(0)=1$. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$.

ενδεικτική απάντηση

Έστω f ,με $\mathrm{f}(x)=g(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow$, $\mathrm{f}(0)=0$

τότε $\mathrm{f}^{/}(x)=g^{/}(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$, $\mathrm{f}^{/}(0)=0$

$\mathrm{f}^{//}(x)=g^{//}(x)+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, οπότε $\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}(x)=0$

(ΓΠ1) $\Rightarrow \mathrm{f}(x)=0\Rightarrow g(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

ή

Έστω $\mathrm{F}(x)=(g(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2+(g^{/}(x)+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2$

$\mathrm{F}(0)=0$

$\mathrm{F}^{/}(x)=2(g^{/}(x)+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)(g^{//}(x)+g(x))=0\Rightarrow \mathrm{F}(x)=\mathrm{C}$

$\mathrm{F}(x)=\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=0\Rightarrow g(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

Ασκήσεις Δίνεται η συνάρτηση g , με $g^{//}(x)+g(x)=0$
Να αποδείξετε ότι

Γ1 Αν $g(0)=1$ και $g^{/}(0)=2$, τότε $g(x)=2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

Γ2 Αν $g(0)=2$ και $g^{/}(0)=3$, τότε $g(x)=3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x$

Γ3 Αν $g(0)=-3$ και $g^{/}(0)=2$, τότε $g(x)=2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x$

Δ Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$\mathrm{f}^{//}(x)+\beta\mathrm{f}^{/}(x)+\gamma\mathrm{f}(x)=\varphi(x)$ **(1)**, $\varphi(x)$ γνωστή

$\mathrm{f}(\xi)$, $\mathrm{f}^{/}(\xi)$ γνωστά **(2)**

Έστω $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ με $\kappa\cdot\lambda=\gamma$ και $\kappa+\lambda=\beta$, τότε

(1) $\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)+\kappa\mathrm{f}^{/}(x)+\lambda\mathrm{f}^{/}(x)+\kappa\lambda\mathrm{f}(x)=\varphi(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)+\kappa\mathrm{f}^{/}(x)+\lambda(\mathrm{f}^{/}(x)+\kappa\mathrm{f}(x))=\varphi(x)$

Έστω g ,με $g(x)=\mathrm{f}^{/}(x)+\kappa\mathrm{f}(x)\Rightarrow g^{/}(x)=\mathrm{f}^{//}(x)+\kappa\mathrm{f}^{/}(x)$

τότε $g^{/}(x)+\lambda g(x)=\varphi(x)$, $g(\xi)$ γνωστό ,από **Β** βρίσκουμε g

οπότε $g(x)=\mathrm{f}^{/}(x)+\kappa\mathrm{f}(x)$ και πάλι από **Β** βρίσκουμε την f

ΔΠ1 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$\mathrm{f}^{//}(x)-4\mathrm{f}(x)=0$ **(1)** και $\mathrm{f}(0)=0$, $\mathrm{f}^{/}(0)=1$ **(2)** να βρείτε

τον τύπο της f.

ενδεικτική απάντηση

(Βρίσκουμε δύο αριθμούς με γινόμενο -4 και άθροισμα 0)

(1) $\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)+2\mathrm{f}^{/}(x)-2\mathrm{f}^{/}(x)-4\mathrm{f}(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)+2\mathrm{f}^{/}(x)-2(\mathrm{f}^{/}(x)+2\mathrm{f}(x))=0$, έστω g , με

$g(x)=\mathrm{f}^{/}(x)+2\mathrm{f}(x)\Rightarrow g^{/}(x)=\mathrm{f}^{//}(x)+2\mathrm{f}^{/}(x)$, $g(0)=1$

οπότε $g^{/}(x)+2g(x)=0\Rightarrow \mathrm{e}^{2x}g^{/}(x)+2\mathrm{e}^{2x}g(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathrm{e}^{2x}g(x))^{/}=0\Rightarrow \mathrm{e}^{2x}g(x)=\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=1$, άρα

$\mathrm{e}^{2x}g(x)=1\Rightarrow g(x)=\mathrm{e}^{-2x}\Rightarrow \mathrm{f}^{/}(x)+2\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{-2x}\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{e}^{2x}\mathrm{f}^{/}(x)+2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{2x}=1\Rightarrow(\mathrm{e}^{2x}\mathrm{f}(x))^{/}=x^{/}$

άρα $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{f}(x)=x+\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=0\Rightarrow \mathrm{e}^{2x}\mathrm{f}(x)=x\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}(x)=x\mathrm{e}^{-2x}$

ΔΠ2 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$f''(x)-3f'(x)-4f(x)=0$ **(1)** και $f(0)=0, f'(0)=1$ **(2)**

να βρείτε τον τύπο της f.

ενδεικτική απάντηση

(Βρίσκουμε δύο αριθμούς με γινόμενο -4 και άθροισμα -3)

(1) $\Rightarrow f''(x)+f'(x)-4f'(x)-4f(x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)+f'(x)-4(f'(x)+f(x))=0$, έστω g, με

$g(x)=f'(x)+f(x) \Rightarrow g'(x)=f''(x)+f'(x), g(0)=1$

οπότε $g'(x)-4g(x)=0 \Rightarrow e^{-4x}g'(x)-4e^{-4x}g(x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{-4x}g(x))'=0 \Rightarrow e^{-4x}g(x)=C \overset{x=0}{\Rightarrow} C=1$, άρα

$e^{-4x}g(x)=1 \Rightarrow g(x)=e^{4x} \Rightarrow f'(x)+f(x)=e^{4x} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x}f'(x)+e^{x}f(x)=e^{4x}e^{x}=e^{5x} \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{x}f(x))'=(\frac{1}{5}e^{5x})' \Rightarrow e^{x}f(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+C$, για $x=0$

$C=-\frac{1}{5}$, άρα $e^{x}f(x)=\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5}e^{-x}$

ΔΠ3 παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$2f''(x)+3f'(x)-5f(x)=0$ **(1)** και $f(0)=0, f'(0)=1$ **(2)**

να βρείτε τον τύπο της f.

ενδεικτική απάντηση

($\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot(-5)=49$, $\kappa=\frac{-3+7}{4}=1$ και $\lambda=\frac{-3-7}{4}=-\frac{5}{2}$)

(1) $\Rightarrow f''(x)+\frac{3}{2}f'(x)-\frac{5}{2}f(x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)-f'(x)+\frac{5}{2}f'(x)-\frac{5}{2}f(x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)-f'(x)+\frac{5}{2}(f'(x)-f(x))=0$, έστω g, με

$g(x)=f'(x)-f(x) \Rightarrow g'(x)=f''(x)-f'(x), g(0)=1$

Όμοια με **ΔΠ2**

Ασκήσεις Να βρείτε τον τυπο της συνάρτησης f, όταν

Δ1 $\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{/}(x)-6\mathrm{f}(x)=6$, $\mathrm{f}^{/}(0)=9$ και $\mathrm{f}(0)=1$

$$\mathrm{f}(x)=3\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-3x}-1$$

Δ2 $\mathrm{f}^{//}(x)-4\mathrm{f}(x)=-2$, $\mathrm{f}^{/}(0)=0=\mathrm{f}(0)$ και $\mathrm{f}(0)=1$

$$\mathrm{f}(x)=\frac{2-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{4}$$

Δ3 $\mathrm{f}^{//}(x)-4\mathrm{f}^{/}(x)+3\mathrm{f}(x)=-12$, $\mathrm{f}^{/}(0)=5$ και $\mathrm{f}(0)=-1$

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{3x}+2\mathrm{e}^{x}-4$$

Δ4 $\mathrm{f}^{//}(x)+3\mathrm{f}^{/}(x)+2\mathrm{f}(x)=2$, $\mathrm{f}^{/}(0)=3$ και $\mathrm{f}(0)=0$

$$\mathrm{f}(x)=1-2\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}$$

Δ5 $\mathrm{f}^{//}(x)+3\mathrm{f}^{/}(x)-4\mathrm{f}(x)=-6x$, $\mathrm{f}^{/}(0)=-6$ και $\mathrm{f}(0)=12$

$$\mathrm{f}(x)=6x+12\mathrm{e}^{-x}$$

Δ6 $\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}(x)=0$, $\mathrm{f}^{/}(0)=1$ και $\mathrm{f}(0)=-1$

$$\mathrm{f}(x)=-\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}$$