ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Delta=[-1,1]\to\mathbb{R}$

$f(-1)=f(0)=f(1)$ και $f'(x)=(e^{x^3-x}-1)f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$

Να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

$$f'(x)=(e^{x^3-x}-1)f(x)\Rightarrow 2f(x)f'(x)=2(e^{x^3-x}-1)f^2(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f^2(x))'=2(e^{x^3-x}-1)f^2(x)$$

(α) $x^3-x\geq 0\Rightarrow e^{x^3-x}-1\geq 0$, για κάθε $x\in[-1,0]$, επομένως

$f^2\nearrow$ στο $[-1,0]$, οπότε $f^2(x)=f^2(0)$

- αν $f(0)=0\Rightarrow f(x)=0$, για κάθε $x\in[-1,0]$
- αν $f(0)\neq 0\Rightarrow f(x)=f(0)\Rightarrow f'(x)=0$, για κάθε $x\in[-1,0]$, οπότε

$0=(e^{x^3-x}-1)f(x)$, για κάθε $x\in[-1,0]$, άρα $f(x)=0$

(β) $x^3-x\leq 0\Rightarrow e^{x^3-x}-1\leq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$, επομένως

$f^2\searrow$ στο $[0,1]$, οπότε $f^2(x)=f^2(0)$

- αν $f(0)=0\Rightarrow f(x)=0$, για κάθε $x\in[0,1]$
- αν $f(0)\neq 0\Rightarrow f(x)=f(0)$, για κάθε $x\in[0,1]$, άρα $f'(x)=0$, για κάθε

$x\in[0,1]$, οπότε $0=(e^{x^3-x}-1)f(x)$, για κάθε $x\in[0,1]$, άρα $f(x)=0$

f συνεχής στο 0, οπότε $f(x)=0$, για κάθε $x\in[-1,1]$