ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $f(1)=f''(1), f(0)+f'(0)=0$, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{e-1}{e}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $(f'(x))^2=f(x)f''(x)$. Να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

$(f'(x))^2=f(x)f''(x)\Rightarrow f''(x)=\frac{(f'(x))^2}{f(x)}$, άρα η f'' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$2f'(x)f''(x)=f'(x)f''(x)+f(x)f^{(3)}(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)f^{(3)}(x)-f'(x)f''(x)=0\Rightarrow \frac{f(x)f^{(3)}(x)-f'(x)f''(x)}{f^2(x)}=0$

Οπότε $\left(\frac{f''(x)}{f(x)}\right)'=0\Rightarrow f''(x)=Cf(x)\overset{x=1}{\Rightarrow} C=1\Rightarrow f''(x)=f(x)$

άρα $f''(x)+f'(x)-(f'(x)+f(x))=0\Rightarrow$

$\Rightarrow (f'(x)+f(x))'=(f'(x)+f(x))\Rightarrow f'(x)+f(x)=Ce^x \overset{x=0}{\Rightarrow} C=0$

οπότε $f'(x)+f(x)=0\Rightarrow (e^x f(x))'=0\Rightarrow e^x f(x)=C_0\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=C_0e^{-x}$, $\int_0^1 f(x)dx=C_0\int_0^1 e^{-x}dx=C_0\left[-e^{-x}\right]_0^1=C_0\frac{e-1}{e}\Rightarrow$

$\Rightarrow C_0\frac{e-1}{e}=\frac{e-1}{e}\Rightarrow C_0=1\Rightarrow f(x)=e^{-x}$

1 ΓΕΛ Αιγάλεω