ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η συνάρτηση f , με $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$, $\mathrm{A_f}=[-1,+\infty)$

(ε 1) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)$

(ε 2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

(ε 3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα

(ε 4) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}+\sqrt{14}}<\dfrac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{13}}+\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{14}+\sqrt{15}}$

ενδεικτική υπόδειξη

(ε 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2+\frac{3}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ε 2) $\mathrm{f}^{/}(x)=\dfrac{-\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})^2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}$

$$\mathrm{f}^{/}(x)=\frac{-1}{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})^3\sqrt{2x+3}\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}<0$$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A_f}=[-1,+\infty)$

(ε 3) Η συνάρτηση λ ,με $\lambda(x)=\dfrac{1}{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})^3\sqrt{2x+3}\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}$

είναι γνησίως φθίνουσα άρα η $\mathrm{f}^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα στο

$(-1,+\infty)$, f συνεχής στο $\mathrm{A_f}=[-1,+\infty)$, άρα η $\mathrm{C_f}$ είναι κυρτή

(ε 4) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις Θ.Μ.Τ σε

κάθε ένα από τα διαστήματα $[11,12]$ και τ$[12,13]$

και η $\mathrm{f}^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, οπότε

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}+\sqrt{14}}<\frac{5}{\sqrt{12}+\sqrt{13}}+\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{14}+\sqrt{15}}$$