

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται η συνάρτηση $f : \Delta = [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο

στο Δ , $f'(0) = 1$ και $e^x f(x) = (f'(x))^2 \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ενδεικτική απάντηση

Από την (1) $\stackrel{x=0}{\Rightarrow} f(0) = 1$ και $f(x) \neq 0$, άρα $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$

$f'(x) \neq 0$, $f'(0) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$

από την (1) $\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f'(x)}{e^x}$ (2)

Έστω $\frac{f(x)}{f'(x)} \geq 1$ (3) $\Leftrightarrow f'(x) - f(x) \leq 0 \Rightarrow (e^{-x} f(x))' \leq 0$

με $x \geq 0 \Rightarrow e^{-x} f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq e^x$ (4)

από τις (2), (3) $\Rightarrow \frac{f'(x)}{e^x} \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq e^x \Rightarrow (f(x) - e^x)' \geq 0$

οπότε με $x \geq 0 \Rightarrow f(x) - e^x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq e^x \stackrel{(4)}{\Rightarrow} f(x) = e^x$

Όμοια όταν $\frac{f(x)}{f'(x)} \leq 1$