ΘΕΜΑ 19

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}:\Delta=[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με συνεχή $\mathrm{f}^{(3)}$ στο Δ

για την οποιά επιπλέον ισχύουν

- $\mathrm{f}^{(3)}(0)=\mathrm{f}^{//}(0)=\mathrm{f}^{/}(0)=1$
- $\mathrm{f}^{(3)}(x)\geq \mathrm{f}(x)$, για κάθε $x\in\Delta$
- $\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}(x)=(\mathrm{f}^{(3)}(x))^2\neq 0$ **(1)** , για κάθε $x\in\Delta$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ενδεικτική απάντηση

Από την **(1)** $\overset{x=0}{\Rightarrow}$ $\mathrm{f}(0)=1$ και $\mathrm{f}(x)\neq 0$, άρα $\mathrm{f}(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$

$\mathrm{f}^{(3)}(x)\neq 0$, $\mathrm{f}^{(3)}(0)>0\Rightarrow \mathrm{f}^{(3)}(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$

από την **(1)** $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)}{\mathrm{f}^{(3)}(x)}=\dfrac{\mathrm{f}^{(3)}(x)}{\mathrm{f}(x)}$ **(2)**

$\mathrm{f}^{(3)}(x)\geq \mathrm{f}(x)\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{f}^{(3)}(x)}{\mathrm{f}(x)}\geq 1$ **(3) άρα** $\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)}{\mathrm{f}^{(3)}(x)}\geq 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{f}^{(3)}(x)\leq \mathrm{f}^{/}(x)\Rightarrow (\mathrm{f}^{//}(x)-\mathrm{f}(x))^{/}\leq 0$, άρα η συνάρτηση A

με $\mathrm{A}(x)=\mathrm{f}^{//}(x)-\mathrm{f}(x)$, είναι γνησίως φθίνουσα , οπότε με

$x\geq 0\Rightarrow \mathrm{A}(x)\leq \mathrm{A}(0)\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)-\mathrm{f}(x)\leq 0$ **(4)**,άρα $\mathrm{f}(x)\geq \mathrm{f}^{//}(x)$ **(5)**

Από την **(3)**$\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{/}(x)-(\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x))\leq 0$, έστω g , με

$g(x)=\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x)$, $g(0)=2$ και $g^{/}(x)-g(x)\leq 0\Rightarrow (\mathrm{e}^{-x}g(x))^{/}\leq 0$

άρα με $x\geq 0$ $\Rightarrow \mathrm{e}^{-x}g(x)\leq 2\Rightarrow \mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x)\leq 2\mathrm{e}^{x}$ $(\mathrm{e}^{x}\mathrm{f}(x)-\mathrm{e}^{2x})^{/}\leq 0$

οπότε με $x\geq 0$ $\Rightarrow \mathrm{e}^{x}\mathrm{f}(x)-\mathrm{e}^{2x}\leq 0\Rightarrow \mathrm{f}(x)\leq \mathrm{e}^{x}$ **(6)**

από τις **(5), (3)** προκύπτει $\mathrm{f}^{(3)}(x)\geq \mathrm{f}^{//}(x)\Rightarrow (\mathrm{f}^{//}(x)-\mathrm{f}^{/}(x))^{/}\geq 0$

οπότε με $x\geq 0\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)-\mathrm{f}^{/}(x)\geq 0\Rightarrow (\mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}(x))^{/}\geq 0$, οπότε

με $x\geq 0\Rightarrow \mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}(x)\geq 0\Rightarrow (\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x))^{/}\geq 0$, με $x\geq 0$ $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)\geq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}(x)\geq \mathrm{e}^{x}\overset{(5)}{\Rightarrow}\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{x}$