ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f, με $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x^4-x^3+5x^2+3x+1}$

και g, με $g(x)=x^2+x+1$ και σύνολα τιμών $\mathrm{R_f}, \mathrm{R}_g$

(ε 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

(ε 2) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $\mathrm{C_f}$, C_g

(ε 3) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{R_f} \subseteq \mathrm{R}_g$

(ε 4) Να αποδείξετε ότι $6\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x > 11$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Έστω η συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=x^4-x^3+5x^2+3x+1$

$\varphi^{/}(x)=4x^3-3x^2+10x+3$, $\varphi^{/}(0)=3$ και $\varphi^{/}(-\frac{1}{2})<0$

$\varphi^{/}$ συνεχής , οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho\in(-\frac{1}{2},0)$

ώστε $\varphi^{/}(\rho)=0 \Rightarrow 3=-4\rho^3+3\rho^2-10\rho$ **(1)**

$\varphi^{//}(x)=12x^2-6x+10$, $\Delta_x<0$, άρα $\varphi^{//}(x)>0$, επομένως

η συνάρτηση $\varphi^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η φ

παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\rho$, με τιμή $\varphi(\rho)$ και λόγω της **(1)**

$$\varphi(\rho)=\rho^4-\rho^3+5\rho^2+3\rho+\frac{-4\rho^3+3\rho^2-10\rho}{3}$$

$$\varphi(\rho)=\frac{3\rho^4-7\rho^3+18\rho^2-\rho}{3}=\frac{3\rho^4-\rho(7\rho^2-18\rho+1)}{3}$$

η εξίσωση $7\rho^2-18\rho+1=0$ έχει δύο θετικές ρίζες , και $\rho\in(-\frac{1}{2},0)$

άρα $7\rho^2-18\rho+1>0$, οπότε $\varphi(\rho)>0$, άρα $\mathrm{A_f}=\mathbb{R}$

(ε 2) $g(x),\mathrm{f}(x)\in(0,+\infty)$ οπότε $g(x)=\mathrm{f}(x)\Leftrightarrow g^2(x)=\mathrm{f}^2(x)$

$(x^2+x+1)^2=x^4-x^3+5x^2+3x+1\Leftrightarrow 3x^3-2x^2-x=0$

άρα $x=-\frac{1}{3}$ ή $x=0$ ή $x=1$, οπότε τα κοινά σημεία των C_f , C_g

είναι $A(-\frac{1}{3},\frac{7}{9})$, $B(0,1)$, $\Gamma(1,3)$

(ε 3) $R_\mathrm{f}=[\mathrm{f}(\rho),+\infty)$, $\rho\in(-\frac{1}{2},0)$ και $R_g=[\frac{3}{4},+\infty)$

Έστω $y_0\in R_\mathrm{f}$, θεωρούμε τη συνάρτηση λ με $\lambda(x)=g(x)-y_0$

$\lambda(x)=x^2+x+1-y_0$, αν $\lambda(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

$\Delta_x=-3+4y_0<0\Leftrightarrow \mathrm{f}(\rho)\le y_0<\frac{3}{4}\Rightarrow\sqrt{\rho^4-\rho^3+5\rho^2+3\rho+1}<\frac{3}{4}$

Για κάθε $\rho\in(-\frac{1}{2},0)$, οπότε για $\rho=-\frac{1}{4}\Rightarrow \mathrm{f}(\rho)<\frac{3}{4}\Leftrightarrow \mathrm{f}^2(\rho)<\frac{9}{16}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{256}+\frac{1}{64}+\frac{5}{16}-\frac{3}{4}+1<\frac{9}{16}\Leftrightarrow\frac{85}{256}<\frac{5}{16}\Leftrightarrow\frac{17}{16}<1$, άτοπο

οπότε υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $\lambda(x_0)=0\Rightarrow g(x_0)=y_0$

επομένως $R_\mathrm{f}\subseteq R_g$

(ε 4) Η συνάρτηση κ , με $\kappa(x)=g^2(x)-\mathrm{f}^2(x)=3x^3-2x^2-x$

Έχει τρείς ρίζες $x=-\frac{1}{3}$ ή $x=0$ ή $x=1$ και είναι συνεχής ως

πολυωνυμική οπότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών διατηρεί

σταθερό πρόσημο $\kappa(\frac{1}{2})=\frac{3}{8}-\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$, άρα $\kappa(x)\le 0$

για κάθε $x\in[0,1]$ οπότε $g^2(x)-\mathrm{f}^2(x)\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(g(x)-\mathrm{f}(x))(g(x)+\mathrm{f}(x))\le 0$ και $g(x)+\mathrm{f}(x)>0$, άρα

$g(x)-\mathrm{f}(x)\le 0\Leftrightarrow g(x)\le \mathrm{f}(x)$ και το « $=$ » δεν ισχύει παντού

άρα $\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x>\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\frac{11}{6}\Rightarrow 6\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x>11$