ΘΕΜΑ 20

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, για την οποιά ισχύουν

- $\mathrm{f}^{//}(0)-2=0=\mathrm{f}^{/}(0)=\mathrm{f}(0)$
- $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}^{//}(x)=4x^3$ **(1)** , για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

(ε 2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(ε 3) Αν $\mathrm{f}^{//}(x)\le 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,τότε να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Με $x\neq 0$, $\mathrm{f}^{//}(x)=\dfrac{4x^3}{\mathrm{f}(x)\mathrm{f}^{/}(x)}$, άρα η $\mathrm{f}^{//}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{f}^{//}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{\mathrm{f}(x)\mathrm{f}^{/}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^2}\,\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)}{x}}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)}{x}=\mathrm{f}^{//}(0)=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^2}\overset{\mathrm{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)}{2x}=1$

Όποτε $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}^{//}(x)=2=\mathrm{f}^{//}(2)$, άρα $\mathrm{f}^{//}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$

και $\mathrm{f}^{//}(x)\neq 0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$,οπότε $\mathrm{f}^{//}(x)>0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

άρα η είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Η $\mathrm{f}^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, $\mathrm{f}^{/}(0)=0$

Με $x>0\Rightarrow \mathrm{f}^{/}(x)>\mathrm{f}^{/}(0)=0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Με $x<0\Rightarrow \mathrm{f}^{/}(x)<\mathrm{f}^{/}(0)=0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

(ε 2) Η f για $x=0$ έχει ελάχιστο με τιμή $\mathrm{f}(0)=0$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[1,x]$

άρα υπάρχει $\xi\in(1,x)$ ώστε $\mathrm{f}'(\xi)=\dfrac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(1)}{x-1}$

$$1<\xi<x \overset{\mathrm{f}'\nearrow}{\Rightarrow} \mathrm{f}'(1)<\mathrm{f}'(\xi)<\mathrm{f}'(x)\Rightarrow (x-1)\mathrm{f}'(1)+\mathrm{f}(1)<\mathrm{f}(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}((x-1)\mathrm{f}'(1)+\mathrm{f}(1))=+\infty\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=+\infty$$

άρα $\mathrm{f}(\mathbb{R}$ [illegible] $\infty)$

(ε 3) Από **(1)** $\overset{x>0}{\Rightarrow} \dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(x)}{2x^3}=\dfrac{2}{\mathrm{f}''(x)}$

- $\mathrm{f}''(x)\le 2\Rightarrow \dfrac{2}{\mathrm{f}''(x)}\ge 1$, οπότε $\dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(x)}{2x^3}\ge 1$

  $\dfrac{\mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(x)}{2x^3}\ge 1\Leftrightarrow 2\mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(x)\ge 4x^3\Rightarrow[(\mathrm{f}(x))^2-x^4]'\ge 0$

  $(\mathrm{f}(x))^2-x^4\nearrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα $(\mathrm{f}(x))^2\ge x^4$

  $\overset{\mathrm{f}(x)\ge 0}{\Rightarrow} \boxed{\mathrm{f}(x)\ge x^2}$

- $\dfrac{2}{\mathrm{f}''(x)}\ge 1 \overset{\mathrm{f}''(x)>0}{\Rightarrow} \mathrm{f}''(x)\le 2\Rightarrow(\mathrm{f}'(x)-2x)'\le 0$, οπότε

  $\mathrm{f}'(x)-2x\searrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα $\mathrm{f}'(x)-2x\le 0$, οπότε

  $(\mathrm{f}(x)-x^2)'\le 0$, άρα $\mathrm{f}(x)-x^2\searrow$ στο $[0,+\infty)$,επομένως

  $\mathrm{f}(x)-x^2\le 0\Rightarrow \boxed{\mathrm{f}(x)\le x^2}$

Τελικά $\boxed{\mathrm{f}(x)=x^2}$ στο $[0,+\infty)$ και f άρτια στο $\mathbb{R}$

άρα $\boxed{\mathrm{f}(x)=x^2}$ στο $\mathbb{R}$