ΘΕΜΑ 21

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=x^2+\sigma\upsilon\nu x+1+\ln(x+1)$

(ε 1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

(ε 2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα

(ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $\mathrm{A_f}=(-1,+\infty)$, f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A_f}=(-1,+\infty)$

$$\mathrm{f}'(x)=2x-\eta\mu x+\frac{1}{x+1},\, x\in(-1,+\infty)$$

Με $x>0$, $x-\eta\mu x>0$ και $x+\dfrac{1}{x+1}>0$, άρα $\mathrm{f}'(x)>0$

Με $-1<x<0$, $-\eta\mu x>0$ και $2x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x+1}>0$,άρα

$\mathrm{f}'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathrm{A_f}$, οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A_f}$

(ε 2) $\mathrm{f}''(x)=2-\sigma\upsilon\nu x-\dfrac{1}{(x+1)^2},\, x\in(-1,+\infty)$

Με $x>0\Rightarrow(x+1)^2>1\Rightarrow\dfrac{1}{(x+1)^2}<1\Rightarrow-\dfrac{1}{(x+1)^2}>-1$

άρα $2-\dfrac{1}{(x+1)^2}>1\Rightarrow 2-\sigma\upsilon\nu x-\dfrac{1}{(x+1)^2}>1-\sigma\upsilon\nu x$

οπότε $\mathrm{f}''(x)>0$,άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$

Με $-1<x<0$, $\mathrm{f}^{(3)}(x)=\eta\mu x+\dfrac{2}{(x+1)^3}$

$$0<x+1<1\Rightarrow\frac{1}{(x+1)^3}>1\Rightarrow\eta\mu x+\frac{2}{(x+1)^3}>2+\eta\mu x>0$$

άρα $\mathrm{f}^{(3)}(x)>0$, $x\in(-1,0)$ και f'' συνεχής στο $x\in(-1,0]$

οπότε f'' γνησίως αύξουσα στο $(-1,0]$, $x<0\Rightarrow\mathrm{f}''(x)<0$

άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$, επομένως f είναι κοίλη στο $(-1,0]$

(ε 3) $\lim\limits_{x \to -1} \mathrm{f}(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\ln(x+1)}{x^2} \overset{\mathrm{DLH}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x(x+1)} = 0$

Οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[1 + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} + \dfrac{1+\ln(x+1)}{x^2}\right] = +\infty$

άρα $\mathrm{f}(\mathrm{A_f}) = \mathbb{R}$