ΘΕΜΑ 22

Δίνονται οι συναρτήσεις φ , f , με $\varphi(x)=x(1+\ln x)-(x+1)\ln(x+1)$

και $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{1+\ln x}$

(ε 1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης φ

(ε 2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

(ε 3) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mathrm{y}_0\in\Delta=(-\infty,0)\cup$

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in \mathrm{A_f}$, ώστε $\mathrm{f}(x_0)=\mathrm{y}_0$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Το πεδίο ορισμού A_φ της συνάρτησης φ είναι $\mathrm{A}_\varphi=(0,+\infty)$

Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A_φ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$\varphi^{/}(x)=1+\ln x+1-\ln(x+1)-1\Rightarrow\varphi^{/}(x)=1+\ln x-\ln(x+1)$

$\varphi^{//}(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x(x+1)}>0$, για κάθε $x\in \mathrm{A}_\varphi$

άρα η συνάρτηση $\varphi^{/}$ είναι $\nearrow$ στο A_φ , οπότε η C_φ είναι κυρτή

$\varphi^{/}(x)=0\Rightarrow 1+\ln x-\ln(x+1)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$, οπότε

Με $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\Rightarrow\varphi^{/}(x)<0\Rightarrow\varphi\searrow$ στο $\Delta1=(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}]$

Με $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\Rightarrow\varphi^{/}(x)>0\Rightarrow\varphi\nearrow$ στο $\Delta2=[\dfrac{1}{\mathrm{e}-1},+\infty)$

άρα η φ για $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ έχει ελάχιστο με τιμή $\varphi(\dfrac{1}{\mathrm{e}-1})=-\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}<0$

$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[x+x\ln x)-(x+1)\ln(x+1)]$

$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\mathrm{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$,επιπλέον

$\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)\ln(x+1)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=0$ και $\varphi\searrow$ στο $\Delta1$

οπότε $\varphi(\Delta1)=[-\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},0)$

Η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\mathrm{e}, x]$, άρα

υπάρχει $\xi_x \in (\mathrm{e}, x)$ ώστε $\varphi'(\xi_x) = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(\mathrm{e})}{x-\mathrm{e}}$, $\mathrm{e} < \xi_x < x$,όμως

$\varphi' \nearrow \Rightarrow \varphi'(\mathrm{e}) < \varphi'(\xi_x) < \varphi'(x) \Rightarrow 2 - \ln(\mathrm{e}+1) < \dfrac{\varphi(x)-\varphi(\mathrm{e})}{x-\mathrm{e}}$

$\varphi(x) > (2-\ln(\mathrm{e}+1))(x-\mathrm{e}) + \varphi(\mathrm{e})$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$,αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty} [(2-\ln(\mathrm{e}+1))(x-\mathrm{e}) + \varphi(\mathrm{e})] = +\infty$, $\varphi \nearrow$ στο $\Delta 2$, άρα

$\varphi(\Delta 2) = [-\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}, +\infty)$, $\varphi(\mathrm{A}_\varphi) = [-\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}, +\infty)$

$0 \in \varphi(\Delta 2)$, άρα υπάρχει $x_0 \in \Delta 2$, ώστε $\varphi(x_0) = 0$

(ε 2) Το πεδίο ορισμού $\mathrm{A_f}$ της συνάρτησης f είναι $\mathrm{A_f} = (0, \frac{1}{\mathrm{e}}) \cup$)

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A_f}$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$\mathrm{f}'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x(x+1)(1+\ln x)^2}$, άρα $\mathrm{f}'(x)\varphi(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathrm{A_f}$

επομένως $\mathrm{f}'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathrm{B}1 = (0, \frac{1}{\mathrm{e}})$ οπότε $\mathrm{f} \searrow$ στο $\mathrm{B}1$

Με $\frac{1}{\mathrm{e}} < x < x_0 \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} \varphi(x) < 0 \Rightarrow \mathrm{f}'(x) < 0 \Rightarrow \mathrm{f} \searrow$ στο $\mathrm{B}2 = (\frac{1}{\mathrm{e}}, x_0]$

Με $x > x_0 \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} \varphi(x) > 0 \Rightarrow \mathrm{f}'(x) > 0 \Rightarrow \mathrm{f} \nearrow$ στο $\mathrm{B}3 = [x_0, +\infty)$

(ε 3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{f}(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\mathrm{e}}^-} \mathrm{f}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\mathrm{e}}^+} \mathrm{f}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = 1$

Οπότε $\mathrm{f}(\mathrm{B}1) = (-\infty, 0)$, $\mathrm{f}(\mathrm{B}2) = [\mathrm{f}(x_0), +\infty)$, $\mathrm{f}(\mathrm{B}3) = [\mathrm{f}(x_0), 1)$

άρα $\mathrm{f}(\mathrm{A_f}) = (-\infty, 0) \cup$ $+\infty)$

$x_0 \in \Delta 2$, ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Rightarrow x_0(1+\ln x_0) = (x_0+1)\ln(x_0+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \ln x_0 = \dfrac{(x_0+1)\ln(x_0+1)}{x_0}$, οπότε $\mathrm{f}(x_0) = \dfrac{\ln(x_0+1)}{1+\ln x_0}$, άρα

$\mathrm{f}(x_0) = \dfrac{\ln(x_0+1)}{\dfrac{(x_0+1)\ln(x_0+1)}{x_0}} = \dfrac{x_0}{x_0+1} < 1 \Rightarrow \Delta \subseteq \mathrm{f}(\mathrm{A_f})$,άρα για κάθε

$\mathrm{y}_0 \in \Delta \Rightarrow \mathrm{y}_0 \in \mathrm{f}(\mathrm{A_f})$,άρα υπάρχει $x_0 \in \mathrm{A_f}$, ώστε $\mathrm{f}(x_0) = \mathrm{y}_0$