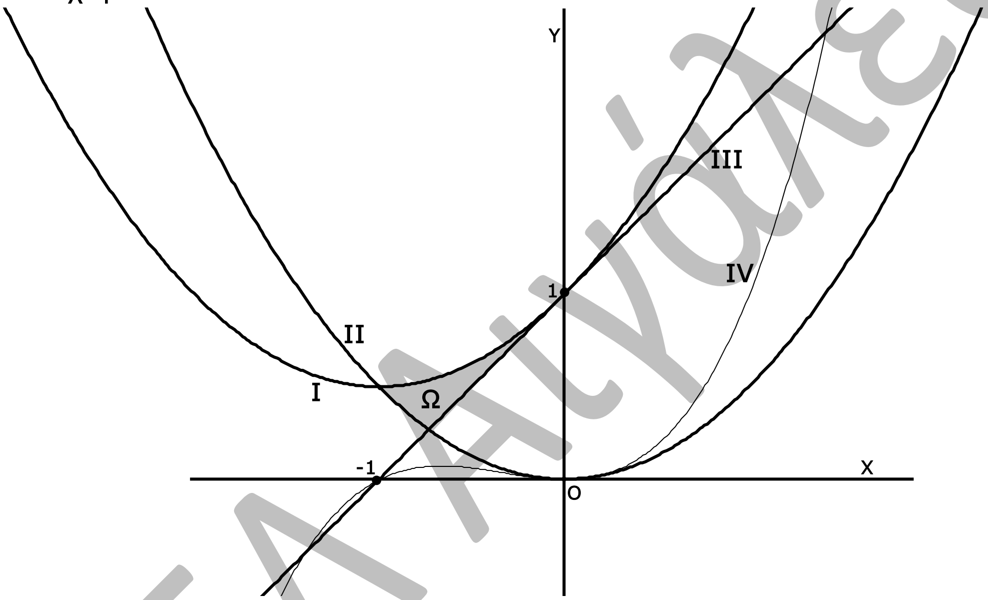
ΘΕΜΑ 24

Κάθε μια από της γραμμές $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}$ είναι η γραφική παράσταση μιας μόνο από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις $\mathrm{f}, g, \mathrm{f}+g, \mathrm{f}\cdot g$ και μια μόνο από τις $\mathrm{f}, g, \mathrm{f}+g, \mathrm{f}\cdot g$ είναι παράγωγος μιας εκ των τριών άλλων. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων $\mathrm{f}, g, \mathrm{f}+g, \mathrm{f}\cdot g$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω



ενδεικτική απάντηση

Έστω το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots \qquad \alpha_0$

Όταν $\alpha_\nu>0$ και ν άρτιος , τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{P}(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{P}(x)$

Όταν $\alpha_\nu<0$ και ν άρτιος , τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{P}(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{P}(x)$

Όταν $\alpha_\nu>0$ και ν περιττός , τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{P}(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{P}(x)=+\infty$

Όταν $\alpha_\nu<0$ και ν περιττός , τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{P}(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{P}(x)=-\infty$

Οπότε οι γραφικές παραστάσεις I, II προκύπτουν από πολυώνυμα άρτιου βαθμού , ενώ οι $\mathrm{III}, \mathrm{IV}$ προκύπτουν από πολυώνυμα περιττού βαθμού και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου για κάθε ένα από τα πολυώνυμα είναι θετικός

Έστω λ η συνάρτηση με γραφική παράσταση την IV, τότε $\lambda(-1)=\lambda(0)$ άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi\in(-1,0)$ ώστε $\lambda'(\xi)=0$, όμως καμία από τις $\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο $\xi\in(-1,0)$,άρα καμία από τις συναρτήσεις των $\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$ δεν είναι παράγωγος της λ

Οι συναρτήσεις με γραφικές τις I,II είναι πολυώνυμα άρτιου βαθμού , άρα η παράγωγος τους είναι περιττού βαθμού επομένως καμια από τις δύο δεν είναι παράγωγος της άλλης , οπότε η συνάρτηση φ με γραφική την III είναι παράγωγος **ή** της I **ή** της II , όμως η III είναι ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(-1,0)$ και $(0,1)$ άρα είναι η $y=x+1$, οπότε μία από τις συναρτήσεις $f,g,f+g,f\cdot g$ είναι η $y=x+1$, έστω κ , με $\kappa(x)=x+1$

Αν η κ είναι η παράγωγος της II τότε η II είναι δευτέρου βαθμού και το 0 είναι διπλή ρίζα , άρα έχει τύπο αx^2 με παράγωγο $2\alpha x$, **άτοπο**

Οπότε η κ είναι η παράγωγος της I , που είναι δευτέρου βαθμού

Έστω θ με γραφική την I , τότε $\theta(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με παράγωγο $\theta'(x)=2\alpha x+\beta=x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $\alpha=\frac{1}{2}$ και $\beta=1$

$\theta(0)=1\Rightarrow\gamma=1$, άρα $\theta(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$,η κ είναι μία από τις f,g έστω $f=\kappa\Rightarrow f(x)=x+1$, αν $g(x)=\theta(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$, τότε $f(x)+g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+2$, οπότε οι I , II θα είχαν με τον $y'y$ κοινά τα σημεία $O(0,0)$ και $(0,2)$ άτοπο , άρα $\theta(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}x^2$

Αν $(f\cdot g)=\kappa(x)$, τότε από τα πολυώνυμα $f(x),g(x)$ το ένα θα είναι βαθμού 0 οπότε θα στο σχήμα θα υπήρχε ευθεία παράλληλη στον $x'x$ άτοπο

Τελικά η III είναι η C_f , η II είναι η C_g , η I είναι η C_{f+g} και η IV είναι η $C_{f\cdot g}$