ΘΕΜΑ 27

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^3}}\cdot\dfrac{x^2+3}{x^4}$

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_{f} και το σύνολο τιμών της f

(ε 2) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(ε 3) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Έστω συνάρτηση φ , με $\varphi(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^3}}>0$, $A_\varphi=(0,+\infty)$

$\varphi(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}$, κάθε μια από τις συναρτήσεις $\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{x^3}$

είναι γνησίως φθίνουσα , άρα και η φ είναι γνησίως φθίνουσα

Η συνάρτηση λ, με $\lambda(x)=\dfrac{x^2+3}{x^4}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}$, κάθε μια από τις

συναρτήσεις $\dfrac{1}{x^2},\dfrac{3}{x^4}$ είναι γνησίως φθίνουσα , άρα και η λ

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής

στο $A_{\mathrm{f}}=(0,+\infty)$, οπότε $\mathrm{f}(A_{\mathrm{f}})=(\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x),\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{f}(x))$

άρα $\mathrm{f}(A_{\mathrm{f}})==(0,+\infty)$

(ε 2) $\varphi'(x)=\left[\left(\dfrac{x^2+1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(\varphi(x))^2}\cdot\dfrac{x^2+3}{x^4}$ και

$\lambda'(x)=-\dfrac{2x^2+12}{x^5}$, άρα $\mathrm{f}'(x)=\varphi'(x)\cdot\lambda(x)+\varphi(x)\cdot\lambda'(x)$

$\mathrm{f}'(x)=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(\varphi(x))^2}\cdot\lambda(x)+\varphi(x)\cdot\lambda'(x)$

$$f'(x)=\varphi(x)\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{(\varphi(x))^3}\cdot\lambda(x)+\varphi(x)\cdot\lambda'(x)\right)$$

$$f'(x)=-\varphi(x)\left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)^2+\frac{2x^2+12}{x^5}\right)$$, άρα

$$f'(x)=-\varphi(x)\left(\frac{1}{3}\frac{(x^2+3)^2}{(x^2+1)x^5}+\frac{2x^2+12}{x^5}\right)$$

Κάθε μία από τις συναρτήσεις $\varphi(x)$, $\frac{1}{3}\frac{(x^2+3)^2}{(x^2+1)x^5}$, $\frac{2x^2+12}{x^5}$

είναι γνησίως φθίνουσα και παίρνει θετικές τιμές άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα , οπότε η C_f είναι κυρτή

(ε 3) Να υπολογίσετε το $I=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^3}}\cdot\frac{x^2+3}{x^4}dx$

Έστω $\frac{x^2+1}{x^3}=u$, για $x=1\Rightarrow u=2$ και για $x=2\Rightarrow u=\frac{5}{8}$

$-\frac{x^2+3}{x^4}dx=du$, οπότε $I=\int_2^{\frac{5}{8}}u^{\frac{1}{3}}du=\frac{3}{4}[u\sqrt[3]{u}]_1^{5/8}$