ΘΕΜΑ 28

Έστω συνάρτηση f ,με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$ για την οποία ισχύουν $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))+x=2\mathrm{f}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επιπλέον η $\mathrm{f}^{/}$ δεν παρουσιάζει ακρότατο σε εσωτερικό σημείο του $\Delta=[\alpha,\beta]$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η f είναι $"1-1"$ στο $\mathbb{R}$

(ε 2) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε $\mathrm{f}^{/}(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(ε 4) Να υπολογίσετε την τιμή της f στο $x_0=0$

(ε 5) Αν επιπλέον για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\mathrm{f}^{/}(x)\geq 1$, τότε να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $\mathrm{f}(x_1)=\mathrm{f}(x_2)\Rightarrow\mathrm{f}(\mathrm{f}(x_1))=\mathrm{f}(\mathrm{f}(x_2))$, τότε $2\mathrm{f}(x_1)-x_1=2\mathrm{f}(x_2)-x_2\Rightarrow x_1,x_2$, άρα η f είναι $"1-1"$

(ε 2) Η f είναι συνεχής και $"1-1"$ στο $\mathbb{R}$, άρα είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, οπότε $\mathrm{f}\circ$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Άρα η συνάρτηση g , με $g(x)=(\mathrm{f}\circ$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(ε 3) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,άρα το σύνολο τιμών της $\mathrm{f}(\mathrm{A_f})$ είναι $\mathrm{f}(\mathrm{A_f})=(\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{f}(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x))$

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=\alpha\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=\mathrm{f}(\alpha)$, άτοπο

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=+\infty$, όμοια ο $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{f}(x)=-\infty$ άρα $\mathrm{f}(\mathrm{A_f})=\mathbb{R}$

(ε 4) Έστω $\mathrm{f}(0)=\kappa\neq 0\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{f}(\kappa)=2\kappa$ και για $x=\kappa\Rightarrow\mathrm{f}(\mathrm{f}(\kappa))=3\kappa$

Η f ικανοποιεί α τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0,\kappa],[\kappa,\mathrm{f}(\kappa)]$, άρα υπάρχει $\xi_1\in(0,\kappa)$, ώστε

$\mathrm{f}^{/}(\xi_1)=\dfrac{\mathrm{f}(\kappa)-\mathrm{f}(0)}{\kappa}=1$ και υπάρχει $\xi_2\in(\kappa,2\kappa)$ ώστε

$f^{/}(\xi_2)=\dfrac{f(f(2\kappa))-f(\kappa)}{f(2\kappa)-\kappa}=1$, η $f^{/}$ είναι συνεχής στο $\Delta=[\xi_1,\xi_2]$

άρα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στα άκρα , επομένως $f^{/}(x)=1$

οπότε $f(x)=x$, για κάθε $x\in\Delta=[\xi_1,\xi_2]$, άρα $f(\kappa)=\kappa\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\kappa)=f(0)\Rightarrow\kappa=0$,άτοπο άρα $f(0)=0$

(ε 5) $f(f(x))+x=2f(x)\Leftrightarrow f(f(x))-f(x)=f(x)-x$

Η συνάρτηση g , με $g(x)=f(x)-x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
και $g^{/}(x)=f^{/}(x)-1\geq 0$, αν η $g^{/}$ μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία , τότε g γνησίως αύξουσα και $g(f(x))=g(x)\Rightarrow f(x)=x$
Αν $g^{/}(x)=0$ σε ένα διάστημα $\Delta 1$ τότε $f^{/}(x)=1\Rightarrow f(x)=x$
και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα $f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$