ΘΕΜΑ 29

Δίνεται η συνάρτηση $f : \Delta = (0,\pi] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \dfrac{x - \eta\mu x}{x}$

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

(ε 2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(ε 3) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(ε 4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in \Delta$, ώστε

$2f'(x) \le \eta\mu\alpha$, για κάθε $x \in \Delta$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $f(x) = \dfrac{x - \eta\mu x}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

Έστω φ ,με $\varphi(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in [0,\pi]$

$\varphi'(x) = x\eta\mu x \ge 0$, για κάθε $x \in [0,\pi] \Rightarrow \varphi \nearrow$, με $0 < x \le \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \varphi(x) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$

(ε 2) Το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta) = (\lim\limits_{x \to 0^+} f(x), f(\pi)] = (0,1]$

(ε 3) $f''(x) = \dfrac{x^2\eta\mu x - 2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$, έστω συνάρτηση λ με

$\lambda(x) = x^2\eta\mu x - 2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in [0,\pi]$

$\lambda'(x) = x^2\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in [0,\pi]$. $\lambda'(x) > 0, x \in (0,\pi/2)$

Άρα $\lambda \nearrow$, στο $[0,\pi/2]$ και $\lambda'(x) < 0, x \in (\pi/2,\pi)$, άρα

$\lambda \searrow$, στο $[\pi/2,\pi]$ $\lambda(0) = 0, \lambda(\pi/2) = \dfrac{\pi^2}{4} - 2 > 0$

Άρα $\lambda(x) > 0$, $x \in (0,\pi/2]$. $\lambda(\pi) = -2\pi < 0$, Bolzano , υπάρχει

$\alpha \in (\pi/2,\pi)$, ώστε $\lambda(\alpha) = 0$ και α μοναδικό , στο $[0,\pi], \lambda(\alpha) = 0$

οπότε $\alpha^2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu\alpha + 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$

άρα $2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\eta\mu\alpha - \alpha^2\eta\mu\alpha$

$\lambda(x) > 0$, για κάθε $x \in [\pi/2,\alpha)$ και $\lambda(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha,\pi]$

Τελικά $\lambda(x)>0$, για κάθε $x\in(0,\alpha)\Rightarrow f^{//}(x)>0$ άρα f κυρτή

και $\lambda(x)<0$, για κάθε $x\in(\alpha,\pi)\Rightarrow f^{//}(x)<0$ άρα f κοίλη

(ε 4) Η $f^{/}$ για $x=\alpha$ έχει μέγιστο με τιμή $f^{/}(\alpha)=\dfrac{\eta\mu\alpha-\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\alpha^2}$

Όμως $2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha=2\eta\mu\alpha-\alpha^2\eta\mu\alpha$, άρα

$$2f^{/}(\alpha)=\frac{2\eta\mu\alpha-2\eta\mu\alpha+\alpha^2\eta\mu\alpha}{\alpha^2}\Rightarrow 2f^{/}(\alpha)=\eta\mu\alpha$$

$$2f^{/}(x)\le 2f^{/}(\alpha)=\eta\mu\alpha$$