ΘΕΜΑ 31

Έστω η συνάρτηση $f:\Delta=(0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

(ε 1) Να μελετήσετε την f, ως προς την μονοτονία

(ε 2) Να μελετήσετε την f, ως προς την κυρτότητα

(ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(ε 4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\Delta$, ώστε

$\xi f(x)\eta\mu\xi\le 1+\sigma\varphi^2\xi$, για κάθε $x\in\Delta$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $f'(x)=-\eta\mu x\ln x+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$, $f'(x)\ge 0$, για κάθε $x\in\Delta 1=(0,1]$

και οπότε $f\nearrow$ στο $\Delta 1$

(ε 2) • $f''(x)=\frac{-x^2\sigma\upsilon\nu x\ln x-2x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$, $f''(x)\le 0 x\in\Delta 2=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$

άρα $f'\searrow$ στο $\Delta 2$ και η f είναι κοίλη στο $\Delta 2$

$f''(x)=\frac{-\sigma\upsilon\nu x(x^2\ln x+1)-2x\eta\mu x}{x^2}$, θεωρούμε τη συνάρτηση

φ, με $\varphi(x)=x^2\ln x+1$, $\varphi'(x)=x(2\ln x+1)$, $x\in\Delta 1=(0,1]$

$2\ln x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{\sqrt{e}}$, οπότε η φ για $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ έχει ελάχιστο

στο $\Delta 1$, οπότε $\varphi(x)\ge\varphi(\frac{1}{\sqrt{e}})=1-\frac{1}{2e}>0$, για κάθε $x\in\Delta 1$

άρα $f''(x)\le 0$, για κάθε $x\in\Delta 1$, άρα $f'\searrow$ στο $\Delta 1$ και η f είναι κοίλη στο $\Delta 1$

$f'(1)=\sigma\upsilon\nu 1>0, f'(1)=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}<0$, η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Bolzano στο Δ, άρα υπάρχει $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$, ώστε

$f'(\xi)=0$, $0<x<\xi\Rightarrow f'(x)>0$, οπότε $f\nearrow$ στο $(0,\xi]$ και

$f'(x)<0$, οπότε $f\searrow$ στο $[\xi,\frac{\pi}{2}]$

(ε 3) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = -\infty$, $f(\xi) = \sigma\upsilon\nu\xi \ln\xi$

Άρα $f(\Delta) = (-\infty, \sigma\upsilon\nu\xi \ln\xi]$

(ε 4) Η $f^{/}$ για $x = \xi$ έχει μέγιστο , οπότε $f(x) \le f(\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \ln x \le \sigma\upsilon\nu\xi \ln\xi$, όμως $f^{/}(\xi) = 0$, επομένως

$-\eta\mu\xi \ln\xi + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\xi} = 0 \Rightarrow \Rightarrow \ln\xi = \dfrac{\sigma\varphi\xi}{\xi}$, οπότε

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \ln x \le \sigma\upsilon\nu\xi \dfrac{\sigma\varphi\xi}{\xi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi\eta\mu\xi\sigma\upsilon\nu x \ln x \le \sigma\upsilon\nu^2\xi \le 1 + \sigma\varphi^2\xi$