ΘΕΜΑ 36

Έστω η συνάρτηση $f:\Delta=(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο Δ

η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, η f έχει το πολύ δύο αρνητικές τιμές και μια τουλάχιστον θετική τιμή και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει ότι: $2\sqrt{\ln x}f^{/}(x)=Cf^2(x)(2\ln x+1)$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{/}}$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι $C<0$

(ε 3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(ε 4) Αν $\int_e^{e^4} f(x)dx=2$, τότε να βρείτε το C

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, άρα

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f^2(x)=+\infty$$

$$f^{/}(x)=\frac{Cf^2(x)(2\ln x+1)}{2\sqrt{\ln x}},\ \lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln x+1}{2\sqrt{\ln x}}=+\infty$$

Αν $C=0\Rightarrow f^{/}(x)=0\Rightarrow f(x)=\kappa\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\kappa$, άτοπο

άρα $\lim_{x\to 1^+} f^{/}(x)=\pm\infty$, οπότε η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{/}}$

(ε 2) Έστω $C>0$, τότε $f^{/}(x)\geq 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε $f(\Delta)=(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x))$, αν $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ τότε υπάρχει α πολύ κοντά στο 1, ώστε $f(\alpha)<0$, όμως η f έχει μια τουλάχιστον θετική τιμή, έστω $f(\rho)>0,\ \rho>\alpha>1$ οπότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[\alpha,\rho]$

άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \rho)$ ώστε $f(\xi)=0$, οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x \in (\alpha, \xi)$, άτοπο .άρα $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ άτοπο

άρα $C<0$

(ε 3) $C<0$, άρα $f'(x) \le 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , οπότε $f(\Delta) = (\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\Delta) = (\beta, +\infty)$, αν $\beta < 0$ τότε από Bolzano υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f(\xi)=0$, οπότε $f(x)<0$,για περισσότερες από δύο τιμές τιμές του $x \in \Delta$, άτοπο άρα $\beta \ge 0$

(ε 4) $f'(x) = \dfrac{Cf^2(x)(2\ln x+1)}{2\sqrt{\ln x}} \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = C\left(\sqrt{\ln x} + \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = C\left(x'\sqrt{\ln x} + \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}x\right) \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)' = C\left(x\sqrt{\ln x}\right)'$

Άρα $-\dfrac{1}{f(x)} = Cx\sqrt{\ln x} + C_0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow C_0 = 0$,οπότε

$f(x) = -\dfrac{1}{Cx\sqrt{\ln x}}$

$\int_e^{e^4} f(x)dx = 2 \Rightarrow \int_e^{e^4} \dfrac{f(x)}{2}dx = 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{C}\int_e^{e^4} \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}dx = 1 \Rightarrow$,

$\Rightarrow -\dfrac{1}{C}\int_e^{e^4} (\sqrt{\ln x})' dx = 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{C} = 1 \Rightarrow C = -1$