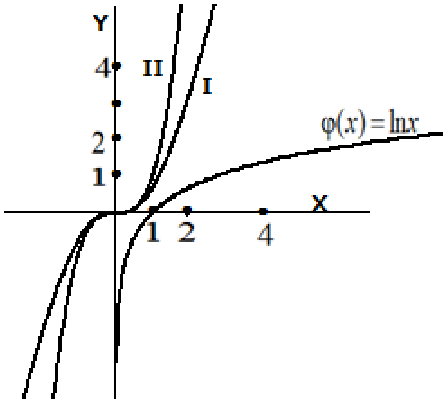
ΘΕΜΑ 38

Οι γραμμές I, II είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με $\mathrm{f}(x)=x^3$ και $g(x)=x\ln(x^2+1)$



(ε 1) Να βρείτε την θέση των $\mathrm{C_f},\mathrm{C}_g$ και στη συνέχεια να αντιστοιχίσετε κάθε μια από τις $\mathrm{C_f},\mathrm{C}_g$ με κάθε μια από τις γραμμές I, II

(ε 2) Να δικαιολογήσετε πως θα αντιστοιχίσετε στον άξονα $x'x$ τους αριθμούς e και $\sqrt{\mathrm{e}-1}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $\mathrm{C_f},\mathrm{C}_g$ και την ευθεία $x=\sqrt{\mathrm{e}-1}$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $\mathrm{f}(x)-g(x)=x^3-x\ln(x^2+1)=x(x^2-\ln(x^2+1))$. Θεωρούμε τη συνάρτηση λ, με $\lambda(x)=x^2-\ln(x^2+1)\Rightarrow\lambda'(x)=2x-\dfrac{2x}{x^2+1}$

$\lambda'(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$, οπότε η συνάρτηση λ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$,άρα $\lambda(x)\geq 0\Rightarrow \mathrm{f}(x)-g(x)\geq 0$, οπότε $\mathrm{f}(x)\geq g(x)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$. $\lambda'(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}\leq 0\Leftrightarrow x\leq 0$ οπότε η συνάρτηση λ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$,άρα $\lambda(x)\geq 0\Rightarrow \mathrm{f}(x)-g(x)\leq 0$, οπότε $\mathrm{f}(x)\leq g(x)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα η γραμμή II είναι η $\mathrm{C_f}$

(ε 2) $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$, έστω $E(\Omega)$ το εμβαδόν

άρα $4E(\Omega) = \int_0^{\sqrt{e-1}} 4x^3 dx - 2\int_0^{\sqrt{e-1}} 2x\ln(x^2+1)dx$

- $\int_0^{\sqrt{e-1}} 4x^3 dx = \left[x^4\right]_0^{\sqrt{e-1}} = (e-1)^2$

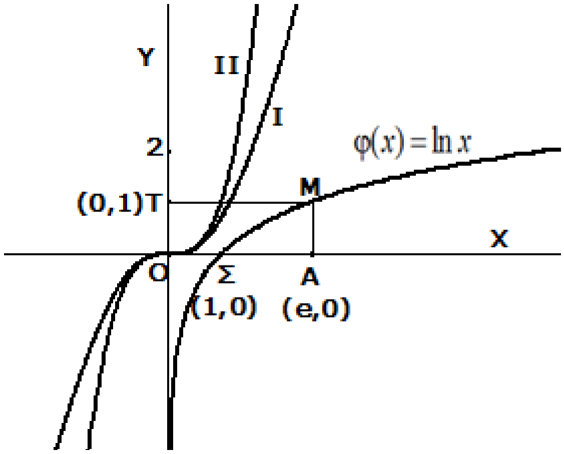
- $\int_0^{\sqrt{e-1}} 2x\ln(x^2+1)dx = \left[x^2\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{e-1}} - \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x^3}{x^2+1}dx \Rightarrow$

  $\Rightarrow \int_0^{\sqrt{e-1}} 2x\ln(x^2+1)dx = (e-1) - \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x^3}{x^2+1}dx$

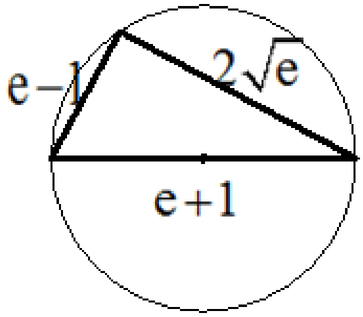
- $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x^3}{x^2+1}dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} 2x dx - \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{x^2+1}dx \Rightarrow$

  $\Rightarrow \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x^3}{x^2+1}dx = \left[x^2\right]_0^{\sqrt{e-1}} - \left[\ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{e-1}} = e-2$

Τελικα $E(\Omega) = \frac{(e-1)^2 - 2}{4}$ τ.μ



- Από το σημείο $T(0,1)$ φέρνουμε παράλληλη στον άξονα $x'x$ που τέμνει την γραφική παράσταση της φ στο σημείο M και από το M φέρνουμε κάθετη στον $x'x$ το σημείο A έχει τετμημένη e το τμήμα ΣA έχει μέτρο $e-1$



- Κατασκευάζουμε ορθογώνιο με υποτείνουσα $e+1$ και κάθετη πλευρά $e-1$, τότε η άλλη κάθετη πλευρά είναι $2\sqrt{e}$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $\alpha=\sqrt{e}$ και κάθετη πλευρά $\beta=1$, οπότε η άλλη κάθετη πλευρά είναι $\sqrt{e-1}$