ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f ,με $\mathrm{f}(x)=x^4-1$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$ με $g(1)=0$ και $g^{/}(1)=4$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι $x^2\mathrm{f}^{//}(x)=12\mathrm{f}(x)+12$

(ε 2) Να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τις $C_{\mathrm{f}^{/}}$ και $C_{\mathrm{f}^{//}}$

(ε 3) Να βρείτε το πλήθος των κοινών εφαπτόμενων των $C_{\mathrm{f}^{/}}$, $C_{\mathrm{f}^{//}}$

(ε 4) Αν $x^2g^{//}(x)=12g(x)+12$, τότε να βρείτε τον τύπο της g

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $\mathrm{f}^{/}(x)=4x^3\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)=12x^2\Rightarrow x^2\mathrm{f}^{//}(x)=12x^4$, οπότε

$x^2\mathrm{f}^{//}(x)=12(\mathrm{f}(x)+1)\Rightarrow x^2\mathrm{f}^{//}(x)=12\mathrm{f}(x)+12$

(ε 2) Έστω συνάρτηση φ , με $\varphi(x)=12x^2-4x^3=4x^2(3-x)$

$\varphi(x)\geq 0\Leftrightarrow x\leq 3$, οπότε $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^3(12x^2-4x^3)\mathrm{d}x\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{E}(\Omega)=[4x^3-x^4]_0^3=108-81=27$ τ.μ

(ε 3) $\mathrm{f}^{/}(x)=4x^3\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)=12x^2\Rightarrow \mathrm{f}^{(3)}(x)=24x$

$\mathrm{f}^{/}(0)=\mathrm{f}^{//}(0)=\mathrm{f}^{(3)}(0)=0$, οπότε ο άξονας $x'x$ είναι κοινή εφαπτομένη των $C_{\mathrm{f}^{/}}$, $C_{\mathrm{f}^{//}}$

Έστω $\mathrm{M}(x_1,\mathrm{f}^{/}(x_1))$ σημείο της $C_{\mathrm{f}^{/}}$ και $\mathrm{N}(x_2,\mathrm{f}^{//}(x_2))$ σημείο της $C_{\mathrm{f}^{//}}$, $(\varepsilon_{\mathrm{M}})$ εφάπτεται $C_{\mathrm{f}^{/}}$ στο $\mathrm{M}(x_1,\mathrm{f}^{/}(x_1))$ και $(\varepsilon_{\mathrm{N}})$ εφάπτεται $C_{\mathrm{f}^{//}}$ στο $\mathrm{N}(x_2,\mathrm{f}^{//}(x_2))$, τότε

$(\varepsilon_{\mathrm{M}}):\mathrm{y}=12x_1^2x-8x_1^3$ και $(\varepsilon_{\mathrm{N}}):\mathrm{y}=36x_2x-24x_2^2$, $(\varepsilon_{\mathrm{M}})\equiv(\varepsilon_{\mathrm{N}})\Leftrightarrow$

$12x_1^2=36x_2$ και $8x_1^3=24x_2^2$, οπότε $x_2=x_1=0$

άρα ο $x'x$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των $C_{\mathrm{f}^{/}}$, $C_{\mathrm{f}^{//}}$

(ε 4) $x^2g^{//}(x)=12g(x)+12 \Rightarrow x^4g^{//}(x)=12x^2g(x)+12x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4g^{//}(x)+4x^3g^{/}(x)=12x^2g(x)+4x^3g^{/}(x)+12x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^4g^{/}(x))^{/}=(4x^3g(x)+4x^3)^{/} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4g^{/}(x)=4x^3g(x)+4x^3+C_1 \overset{x=1}{\Rightarrow} C_1=0$, οπότε

$x^4g^{/}(x)-4x^3g(x)=4x^3 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \dfrac{x^4g^{/}(x)-4x^3g(x)}{x^8}=\dfrac{4x^3}{x^8}$, άρα

$\left(\dfrac{g(x)}{x^4}\right)^{/}=\left(-x^{-4}\right)^{/} \Rightarrow \dfrac{g(x)}{x^4}=-x^{-4}+C \overset{x=1}{\Rightarrow} C=1$, οπότε

$\dfrac{g(x)}{x^4}=-x^{-4}+1 \Rightarrow g(x)=x^4-1$