ΘΕΜΑ 41

Δίνεται η συνάρτηση f, με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x\mathrm{f}'(x)+\mathrm{f}(x)\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = 6\kappa x+2$, $\kappa \in \mathbb{R}$ **(1)**, $\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \geq 0$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $\mathrm{f}(0)\mathrm{f}(\xi)=2$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}'(0) \neq 0$

(ε 3) Αν $\kappa = 1$, τότε να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Από την **(1)** $\overset{x=0}{\Rightarrow} \mathrm{f}(0)\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)$

F μια παράγουσα της f, η F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[0,1]$, άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $\mathrm{F}'(\xi)=\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}(\xi)=\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(1)$, οπότε $\mathrm{f}(0)\mathrm{f}(\xi)=2$

(ε 2) Έστω $\boxed{\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \mathrm{C}}$

Με $x \neq 0$ από την **(1)** $\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = \dfrac{6\kappa x+2-\mathrm{f}(x)\mathrm{C}}{x}$, f' συνεχής

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\kappa x+2-\mathrm{f}(x)\mathrm{C}}{x}$, όμως $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ και

$\lim\limits_{x\to 0}(6\kappa x+2-\mathrm{f}(x)\mathrm{C})=0$, $(6\kappa x+2-\mathrm{f}(x)\mathrm{C})' = 6\kappa\mathrm{f}'(x)\mathrm{C}$

οπότε,από κανόνες de l'hospital , $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\kappa-\mathrm{f}'(x)\mathrm{C}}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(0)=6\kappa-\mathrm{f}'(0)\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{f}'(0)(1+\mathrm{C})=6\kappa \neq 0$, $\mathrm{f}(\xi)=\mathrm{C}$

άρα $\mathrm{f}'(0)(1+\mathrm{f}(\xi)) \neq 0 \overset{1+\mathrm{f}(\xi)>0}{\Rightarrow} \mathrm{f}'(0) \neq 0$

(ε 3)

$$\Rightarrow x^{C-1}xf^{/}(x)+Cx^{C-1}f(x)=6xx^{C-1}+2x^{C-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{C}f^{/}(x)+Cx^{C-1}f(x)=6x^{C}+2x^{C-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{C}f(x))^{/}=\Big(\frac{6}{C+1}x^{C+1}+\frac{2}{C}x^{C}\Big)^{/}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{C}f(x)=\frac{6}{C+1}x^{C+1}+\frac{2}{C}x^{C}+C_0$$, για $x=0\Rightarrow C_0=0$

άρα $x^{C}f(x)=\frac{6}{C+1}x^{C+1}+\frac{2}{C}x^{C}\overset{x\neq 0}{\Rightarrow} f(x)=\frac{6}{C+1}x+\frac{2}{C}\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$x^{C}f(x)=\frac{6}{C+1}x^{C+1}+\frac{2}{C}x^{C}\overset{x\neq 0}{\Rightarrow} f(x)=\frac{6}{C+1}x+\frac{2}{C}$$

άρα $\int_0^1\Big(\frac{6}{C+1}x+\frac{2}{C}\Big)dx=C\Rightarrow\Big[\frac{3}{C+1}x^2+\frac{2}{C}x\Big]_0^1=C\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{C+1}+\frac{2}{C}=C\Rightarrow 3C+2(C+1)=(C+1)C^2\Rightarrow$$

$\Rightarrow C^3+C^2-5C-2=0$, η $C=2$ ρίζα με σχήμα Horner , οπότε

$(C-2)(C^2+3C+1)=0$, άρα η $C=2$ μοναδική ρίζα

Τελικά $f(x)=2x+1$