ΘΕΜΑ 5

Η συνάρτηση $f:\Delta=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο Δ $f^{(3)}(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$, άξονας $x'x$ δεν είναι οριζόντια ασύμπτωτη των $C_f, C_{f'}, C_{f''}$ και $f(x)f'(x)f''(x)=18x^6$ **(1)**, για κάθε $x\in\Delta$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ούτε ακρότατα και ούτε σημεία καμπής

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η f' δεν έχει ούτε ακρότατα και ούτε σημεία καμπής

(ε 3) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

(ε 4) Αν επιπλέον η f είναι πολυωνυμική με ακέραιους μη αρνητικούς συντελεστές και $f''(1)=2f'(1)=6f(1)$,τότε να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Αν η f έχει ακρότατο στο $\rho\in\Delta$, τότε $f'(\rho)=0$ άτοπο

Αν η f έχει σημείο καμπής στο $\rho\in\Delta$ τότε $f''(\rho)=0$ άτοπο

(ε 2) Αν η f' έχει ακρότατο στο $\rho\in\Delta$, τότε $f''(\rho)=0$ άτοπο

Αν η f' έχει σημείο καμπής στο $\rho\in\Delta$, τότε $f^{(3)}(\rho)=0$ άτοπο

(ε 3) Οι συναρτήσεις f, f', f'' είναι συνεχείς και δε μηδενίζονται στο Δ οπότε η κάθε μία διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ

- Έστω $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)<0$, τότε $f\searrow$ και $f'\searrow$ στο Δ

  Με $x>1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)<f(1)$. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[1,x]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$,ώστε

  $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, $1<\xi<x \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)<f'(1)$, οπότε

  $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(1)\Rightarrow f(x)<(x-1)f'(1)+f(1)$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-1)f'(1)+f(1)]=-\infty$, γιατί $f'(1)<0$, άρα

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, άτοπο γιατί $f(x)>0$

- Έστω $\mathrm{f}(x)<0, \mathrm{f}^{/}(x)>0,\ \mathrm{f}^{//}(x)<0$, τότε $\mathrm{f}\nearrow$ και $\mathrm{f}^{/}\searrow$ στο Δ

  Με $x>1 \overset{\mathrm{f}\nearrow}{\Rightarrow} \mathrm{f}(x)>\mathrm{f}(1)$. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[1,x]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$,ώστε

  $\mathrm{f}^{/}(\xi)=\dfrac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(1)}{x-1}$, $1<\xi<x \overset{\mathrm{f}^{/}\searrow}{\Rightarrow} \mathrm{f}^{/}(x)<\mathrm{f}^{/}(\xi)<\mathrm{f}^{/}(1)$, οπότε

  $\dfrac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(1)}{x-1}>\mathrm{f}^{/}(1)\Rightarrow \mathrm{f}(x)>(x-1)\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(1)$, $\mathrm{f}^{/}\searrow$, άρα

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}^{/}(x)=-\infty$, **άτοπο** , γιατί $\mathrm{f}^{/}(x)>0$

  άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}^{/}(x)=\alpha\geq 0$, αν $\alpha=0$, τότε η $\mathrm{y}=0$ ασύμπτωτη

  άτοπο , άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}^{/}(x)=\alpha>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=+\infty$

  γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-1)\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(1)]=+\infty$, **άτοπο** , γιατί $\mathrm{f}(x)<0$

- Έστω $\mathrm{f}(x)<0, \mathrm{f}^{/}(x)<0,\ \mathrm{f}^{//}(x)>0$, τότε $\mathrm{f}^{/}\nearrow$ στο Δ

  Με $x>1 \overset{\mathrm{f}^{/}\searrow}{\Rightarrow} \mathrm{f}^{/}(x)<\mathrm{f}(1)$. Η $\mathrm{f}^{/}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[1,x]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$,ώστε

  $\mathrm{f}^{//}(\xi)=\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}^{/}(1)}{x-1}$, $1<\xi<x \overset{\mathrm{f}^{//}\nearrow}{\Rightarrow} \mathrm{f}^{//}(1)<\mathrm{f}^{//}(\xi)<\mathrm{f}^{//}(x)$

  οπότε $\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}^{/}(1)}{x-1}>\mathrm{f}^{//}(1)\Rightarrow \mathrm{f}^{/}(x)>(x-1)\mathrm{f}^{//}(1)+\mathrm{f}(1)$

  Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-1)\mathrm{f}^{//}(1)+\mathrm{f}(1)]=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}^{/}(x)=+\infty$

  άτοπο, άρα $\mathrm{f}(x)>0, \mathrm{f}^{/}(x)>0$ και $\mathrm{f}^{//}(x)>0$

  οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή

(ε 4) Έστω ν ο βαθμός του $\mathrm{f}(x)$, τότε ο βαθμός του $\mathrm{f}^{/}(x)$ είναι $\nu-1$ και $\nu-2$ ο βαθμός του $\mathrm{f}^{//}(x)$, οπότε ο βαθμός του $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}^{//}(x)$ είναι $3\nu-3$, άρα $3\nu-3=6\Rightarrow\nu=3$, άρα $\mathrm{f}(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$

$\mathrm{f}^{/}(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ και $\mathrm{f}^{//}(x)=6\alpha x+2\beta$

$18\mathrm{f}(1)=18\Rightarrow\mathrm{f}(1)=1$, οπότε $\mathrm{f}^{/}(1)=3$ και $\mathrm{f}^{//}(1)=6$, άρα

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ **(1)** $3\alpha+2\beta+\gamma=3$ **(2)** $3\alpha+\beta=3$ **(3)**

Από τις **(2), (3)** έχουμε $\beta+\gamma=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\alpha+\delta=1\Rightarrow\alpha=1-\delta\geq 0\Rightarrow$
$\Rightarrow 1>\delta\geq 0\Rightarrow\delta=0\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow\beta=0\Rightarrow\gamma=0$, άρα $f(x)=x^3$