## ΘΕΜΑ 8

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $\mathrm{f}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
Η $C_f$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων .Επιπλέον ισχύουν

- Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και $f'(1)=2$
- $(f'(x))^2=2f(x)f''(x)$ **( 1 )** , για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**( ε 1 )** Να αποδείξετε ότι η $f''$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
**( ε 2 )** Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία
**( ε 3 )** Να μελετήσετε την $f$ ως προς την κυρτότητα
**( ε 4 )** Να βρείτε τον τύπο της $f$

**ενδεικτική απάντηση**

**( ε 1 )** $f(0)=0$ ,οπότε και $f'(0)=0$, άρα η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$

Έστω $\rho\in\mathbb{R}$ με $f(\rho)=0$, τότε η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,\rho]$ ή $[\rho,0]$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,\rho)$ ή $\xi\in(\rho,0)$ ώστε ό $f'(\xi)=0$, άτοπο οπότε η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$

Με $x\neq 0$, $f''(x)=\dfrac{(f'(x))^2}{2f(x)}$ , άρα η συνάρτηση $f''$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta1=(-\infty,0)$ και $\Delta2=(0,+\infty)$ ,οπότε από τη σχέση **( 1 )**

$2f'(x)f''(x)=2f'(x)f''(x)+f(x)f^{(3)}(x)$ , επομένως

$f(x)f^{(3)}(x)=0$ , για κάθε $x\in\Delta1$ και για κάθε $x\in\Delta2$

Άρα $f''(x)=\begin{cases} C_1 & ,x\in\Delta1 \\ C_2 & ,x\in\Delta2 \end{cases}$, όμως $f''$ άρτια άρα

$f''(-1)=f''(1)\Rightarrow C_1=C_2=C$, δηλαδή $f''(x)=C$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ , άρα $\lim\limits_{x\to0}f''(x)=C$

$f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}\overset{\mathrm{Dl'h}}{=}\lim\limits_{x\to0}f''(x)=C$, άρα $f''$ συνεχής

στο $x_0=0$, άρα $f''$ συνεχής στο $\mathbb{R}$

**( ε 2 )** Η συνάρτηση $\mathrm{f}$ είναι άρτια και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $\mathrm{f}'$ είναι περιττή και η συνάρτηση $\mathrm{f}''$ είναι άρτια

Η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\mathrm{f}'(x)=0$ και της εξίσωσης $\mathrm{f}(x)=0$

$\mathrm{f}'$ συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta 1=(-\infty,0)$ και $\Delta 2=(0,+\infty)$, $\mathrm{f}'(1)=2$ και $\mathrm{f}'(-1)=-\mathrm{f}'(1)=-2$, επομένως $\mathrm{f}'(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta 2$ και $\mathrm{f}'(x)<0$, για κάθε $x\in\Delta 1$, άρα $\mathrm{f}\searrow$ στο $\Delta 1$ και $\mathrm{f}\nearrow$ στο $\Delta 2$, οπότε η $\mathrm{f}$ για $x=0$ έχει ελάχιστο με τιμή $\mathrm{f}(0)=0\Rightarrow \mathrm{f}(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**( ε 3 )** $(\mathrm{f}'(x))^2=2\mathrm{f}(x)\mathrm{f}''(x)$ **( 1 )**, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

άρα $\mathrm{f}''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η $\mathrm{f}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

**( ε 4 )** $\mathrm{f}''(x)=\mathrm{C}$, άρα $\mathrm{f}'(x)=\mathrm{C}x+\mathrm{C}_1\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}_1=0\overset{x=1}{\Rightarrow}\mathrm{f}'(1)=\mathrm{C}\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathrm{C}=2\Rightarrow\mathrm{f}'(x)=2x\Rightarrow\mathrm{f}(x)=x^2+\mathrm{C}_0\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}_0=0$

τελικά $\mathrm{f}(x)=x^2$