1. **Δίνεται η συνάρτηση f ,με τύπο $f(x)=\begin{cases} x+3 & ,x\le 1 \\ x^2+3x & ,x>1 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , στο διάστημα $\Delta=[-1,2]$.**

2. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\begin{cases} x-3 & ,x\le 2 \\ x^2-3x+2 & ,x>2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , στο διάστημα $\Delta=[-3,3]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le \alpha \\ 3x-4 & ,x>\alpha \end{cases}$ Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ,στο διάστημα $\Delta=[\alpha-2,\alpha+2]$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & ,x\le 2 \\ x^2-3x+7 & ,x>2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση
f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , στο διάστημα $\Delta=[-3,3]$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ,x\le 1 \\ 2x^3-3 & ,x>1 \end{cases}$.Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , στο διάστημα $\Delta=[-2,2]$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & ,x<0 \\ 4x^3-1 & ,x\ge 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , στο διάστημα $\Delta=[-1,1]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2x^3-x+1 & , x\le 1 \\ 3x^2-x & , x>1 \end{cases}$.Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , στο διάστημα $\Delta=[-2,2]$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2\alpha x+\beta & , x\le 2 \\ x^2-\gamma x+1 & , x>2 \end{cases}$. Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , στο διάστημα $\Delta=\left[-4,3\right]$,να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x)=\alpha x^3+(\beta+1)x+3\gamma$. Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta=\left[-1,0\right]$,να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$
.

10. Δίνεται η συνάρτηση f ,με τύπο $f(x)=x^3+(3-2\alpha)x^2+(6-4\alpha)x-\alpha$.
Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta=\left[1,2\right]$ να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$.

11. Έστω η συνάρτηση f ,με $f(x)=\begin{cases} x^3+(\alpha-2)x+\beta-\alpha+1 & , 0\le x\le 1 \\ \gamma x^2+2(2-\gamma)x+4 & , 1<x\le 2 \end{cases}$.Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta=\left[0,2\right]$,να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

12. Έστω η συνάρτηση f ,με $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+\gamma & , x\le 1 \\ x^3+\gamma x+\beta & , 1<x \end{cases}$.Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta=\left[0,2\right]$,να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

13. Δίνονται οι συναρτήσεις φ, g , παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \varphi(x) & , x\le 1 \\ g(x) & , 1<x \end{cases}$, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta=\left[0,2\right]$.
Να αποδείξετε ότι

1. Η ευθεία (ε) , η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , στο σημείο της $M(1,f(1))$, εφάπτεται και στις γραφικές παραστάσεις C_φ, C_g των συναρτήσεων φ, g αντίστοιχα.

2. Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $\varphi'(\xi)+g'(2-\xi)=0$

14. **Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 3x + 5$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta = [0,3]$ και μετά να βρείτε όλα τα $\xi \in (0,3)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.**

15. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ,με $f(x) = e^{x^2 - x}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta = [0,1]$ και μετά να βρείτε όλα τα $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

16. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = ln(x^2 - 2x + 3)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ,στο διάστημα $\Delta = [0,2]$ και μετά να βρείτε όλα τα $\xi \in (0,2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

17. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = x^6 - x^4 + x^2 - 1$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ,στο διάστημα $\Delta = [-1,1]$ και μετά να βρείτε όλα τα $\xi \in (-1,1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

18. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ,με $f(x) = 2010 - \sqrt{-ln^2 x - 3\ln x + 4}$,ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle , στο πεδίο ορισμού της A_f και μετά να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' , με τον άξονα $x'x$.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.Αν $g'(x) \neq 0$ και ισχύει ότι $f(x) = g(x^2 - 3x + 3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,τότε να εξετάσετε αν η η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ,στο διάστημα $\Delta = [1,2]$ και στην συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (1,2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

20. **(α)** Να αποδείξετε ότι , κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι γνησίως μονότονη σε ένα κλειστό διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε αυτό , δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε κάθε κλειστό διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$

(β) Δίνεται η συνάρτηση f ,παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) = 3 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει κλειστό διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$,στο οποίο η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

21. Έστω η συνάρτηση f ,με $f(x) = x^3 - x - ln(x^2 - x + 1)$. Να αποδείξετε ότι:

(α). Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta = [0,1]$

(β) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $\left(3\xi^2 - 1\right)\left(\xi^2 - \xi + 1\right) = 2\xi - 1$.

22. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και η f είναι άρτια ,ακόμα ισχύει ότι $g(x) = e^{x^2} \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α).Να αποδείξετε ότι , η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta = [-1,1]$

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ ώστε $2\xi \cdot f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

23. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(0) = f(\pi)$ και $g(x) = f(x) \cdot e^{\eta\mu x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ ώστε $f'(\xi) + f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = 0$.

24. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(0) = f(2)$ και $g(x) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu(\pi\xi) = \pi f(\xi)\eta\mu(\pi\xi)$.

25. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(1) = f(2)$ και $g(x) = (x^2 - 3x + 4)f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ ώστε $\left(\xi^2 - 3\xi + 4\right)f'(\xi) = (3 - 2\xi)f(\xi)$.

26. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x^2 - 3x + 2) = f(x^2 - 3x + 1)$. Να αποδείξετε ότι

(α)Υπάρχει ευθεία $(\varepsilon)//x'x$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

(β)Υπάρχει $\xi \in (0,3)$,ώστε $(2\xi - 3)f'(\xi^2 - 3\xi + 1) = 0$

27. Δίνονται ,οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g και η f είναι "1-1" .Αν ισχύει ότι $g(x^2 - x) = f(g(x))$, να αποδείξετε ότι

(α)Υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $g'(\xi) = 0$

(β)Υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $(2\xi - 1)g'(\xi^2 - \xi) = 0$

28. **Δίνεται η συνάρτηση f ,παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)+1=f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$,ώστε $2f'(\xi)=2\xi+1$.**

29. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)=2xf(x)$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1)\neq 2$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

30. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι $7f(x)\geq 2f(1)+5f(4)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,5)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

31. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$(x^2-x+7)f(x)\geq (x^2+3)f(x^2)+(4-x)f(1-x)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

32. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$f(x+3)\geq f(x^2-x+2)$ Να αποδείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle $\Delta=\left[2,4\right]$

(β) Ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ ώστε $(2\xi-1)f'(\xi^2-\xi+2)=f'(\xi+3)$.

33. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$(x^2-3x+9)f(x+4)\geq \left(5-x\right)f\left(x^2-2x+6\right)+(x^2-2x+4)f(x^2-4x+9)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (5,6)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

34. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(1)=3$ και $f(3)=5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ ώστε $f'(\xi)+3=2\xi$.

35. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(1)=3$ και $f(3)=5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ ώστε $(\xi^2-3\xi+5)f'(\xi)=(2\xi-3)f(\xi)$.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g . f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$f(x)=(x-1)f(x^2-x)$ και $g(x)=f(x^2-x)$. Να αποδείξετε ότι

(α) Οι συναρτήσεις f , g ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\Delta=\left[0,1\right]$

(β) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi)=g(\xi)$.

37. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με $f(x)=e^{2x}g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(1)=g(2)=0$.Να αποδείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $\xi_1 \in (1,2)$ ώστε $f'(\xi_1)-2e^{2\xi_1}g(\xi_1)=0$.

(β) Υπάρχει $\xi_2 \in (1,2)$ ώστε $2f(\xi_2)+e^{2\xi_2}g'(\xi_2)=0$.

38. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ώστε $f'(\xi)=\varepsilon\phi\xi\cdot f(\xi)$

39. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $\Delta=[1,3]$ και παραγωγίσιμη $(1,3)$ με $f(1)=f(3)=0$.
Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει $\xi\in(1,3)$, ώστε $f'(\xi)=3\xi^2 f(\xi)$

40. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(0)+2\mathrm{e}=f'(1)+1$. Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε $f''(\xi)=2\mathrm{e}^{\xi}+\xi\mathrm{e}^{\xi}$.

41. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(0)+1=f(1)$ και $2<f'(x)<4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει $\xi_0\in(0,2)$. ώστε $f''(\xi_0)=2$.

42. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει ότι
$f(1)+1=f(\mathrm{e})$ και $\frac{1}{3}<f'(x)<\frac{1}{\mathrm{e}}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει $\xi\in(1,3)$, ώστε $\xi^2 f''(\xi)+1=0$.

43. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν
$\mathrm{e}(f(0)-f(1))=\mathrm{e}-1$ και $-1/\mathrm{e}<f'(x)<-1/\mathrm{e}^2$.
Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε $\mathrm{e}^{\xi}f''(\xi)=1$.

44. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν
$f(0)+1=f(1)$ και $2<f'(x)<4$.
Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε $f''(\xi)=2$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $g(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$,έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,ώστε $f'(\xi) = f(\xi)\varepsilon\varphi\xi$.

46. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x\,ln(2-x)$, ορισμένη στο $\Delta = [0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta = [0,1]$

(β) Η εξίσωση $(x-2)^2 = e^x(2-x)^x$,έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

47. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f(-1) = f(1) = 0$ και η συνάρτηση g ,με $g(x) = e^{-3x} f(x)$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$

(β) Η εξίσωση $3f(x) = f'(x)$,έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

48. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και η συνάρτηση g ,με $g(x) = (x-1)(x-3)e^{f(x)}$ Να αποδείξετε ότι:

Η εξίσωση $(x-1)(x-3)f'(x) = 4-2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$

49. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g.

Αν $f(1) + f(2) + f(3) = 0$, $f(1)\cdot f(3) > 0$ και $g(x) = e^{1-x^2} f(x)$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

(β) Η εξίσωση $f'(x) = 2x \cdot f(x)$,έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$.

50. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $(f(2) - f(1))(f(3) - f(2)) < 0$ και $f(1) = f(0)$.

Να αποδείξετε ότι

(α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

(β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_0 \in (0,2)$, ώστε $f'(\xi_0 + 1) = f'(\xi_0)$

51. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[2,4\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(2,4\right)$ και η συνάρτηση F με $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ αν $f(2)=f(4)=0$ τότε

(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(2,4\right)$ ώστε $F'(\xi)=0$

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και διέρχεται από το σημείο $\left(1,0\right)$

52. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[0,1\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$ με $f(0)=f(1)=0$ και η συνάρτηση F .Αν $(x+1)F(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\left[0,1\right]$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και διέρχεται από το σημείο $(-1,0)$.

53. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[1,5\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(1,5\right)$ με $f(5)-5f(1)=0$
Να αποδείξετε ότι

(α). Υπάρχει $\xi\in(1,5)$ ώστε $f'\left(\xi\right)=\dfrac{f\left(\xi\right)}{\xi}$

(β) Υπάρχει ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

54. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $e^2 f(0)=f(1)$
Να αποδείξετε ότι

(α). Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=2f(\xi)$

(β) Υπάρχει ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και διέρχεται από το σημείο $M(-1/2\ ,\ -2\xi f(\xi))$

55. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)+e=e\,f(2)+1$
Να αποδείξετε ότι

(α). Υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε $f'(\xi)+f(\xi)=1$

(β) Υπάρχει ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και διέρχεται από το σημείο $M(\xi+1\ ,\ 1)$

56. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ με $f(1)f(2)f(3)=1$ και $f(1)+f(2)+f(3)=0$. Αν $f(2)>\ln 3$,τότε να αποδείξετε ότι : Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[1,3]$.

57. **Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + f^2(x) + x = e^x + x^2$. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία (ε) παράλληλη στον άξονα $x'x$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.**

58. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + e^{f(x)} - f^2(x) = e^{2x} + x^3$. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία (ε) παράλληλη στον άξονα $x'x$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

59. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 3 - 5x$. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία (ε) ,παράλληλη στην ευθεία $(\eta): y = x$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

60. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$f^3(x) + f(x) = 2x$.

Να αποδείξετε ότι

1. Υπάρχει $\xi \in (1,2)$, ώστε $f'(\xi - 1) = 2$

2. Υπάρχει $\xi \in (1,2)$, ώστε $f(\xi - 1) = 2$

3. Υπάρχει ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση , της συνάρτησης f και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(\xi, 2)$

61. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τιμές στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει ότι : $f(x) + \ln f(x) = x$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι

1. $f(1) = 1$

2. Υπάρχει $\xi \in (1,2)$, ώστε $f(\xi)\ln f(\xi) = (2 - \xi) f'(\xi)$

62. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[1,3]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $f''(x) \neq 0$ για την οποία ισχύουν : $f(1)f(3) > 0$ και $f(1) + f(2) + f(3) = 0$

Να αποδείξετε ότι

1. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(1,3)$

2. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$

3. Υπάρχει μόνο μια ευθεία $(\varepsilon)//x'x$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f.

63. **Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e \cdot f(0) = f(1)$.**
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$,ώστε $f'(\xi) = 2 \cdot \xi \cdot f(\xi)$.

64. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(1) = f(4)$.

Να αποδείξετε ότι:Υπάρχει $\xi \in (1,2)$ ώστε $\dfrac{1 - f'(\xi^2)}{3} = \dfrac{1 + 3f'(3\xi - 2)}{2\xi}$.

65. Δίνεται η συνάρτηση f άρτια και συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = f(x)\eta\mu x$,έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

66. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι $3f(x) \geq 2f(0) + f(1)$.

(α). Να αποδείξετε ότι $f(0) = f(1)$

(β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{1 - 2\xi}{1 + 3f^2(\xi)}$.

67. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι $f(4) = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-2,1)$ ώστε $2\xi\left(f'(\xi^2) + 1\right) = f'(2 - \xi) - 1$.

68. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι
$4f(1) \cdot f(2) = f(1) - f(2)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,2]$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ ώστε $f'(\xi) + (2\xi + 1)f^2(\xi) = 0$.

69. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι $f(0) = f(1)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = f'(\xi)f(\xi)$.

70. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι
$f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και $f(-1) \cdot f'(1) - f'(-1) \cdot f(1) = 0$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ ώστε $f''(\xi)f(\xi) > 0$.

71. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[1,3]$ και παραγωγίσιμες στο $(1,3)$ για την οποίες ισχύει ότι $g(x) \cdot g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,3]$ και $f(1)g(3) = f(3)g(1)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ ώστε $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

72. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[3,7\right]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,7)$,για την οποία ισχύει ότι $\mathrm{e}^{f(3)-f(7)}=\dfrac{7}{3}$.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)+1=0$ έχει ρίζα στο $(3,7)$.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο Δ ,για την οποία ισχύει ότι $5^{f(5)}=3^{f(3)}$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(3,5)$ ώστε $\xi f'(\xi)ln\xi+f(\xi)=0$

74. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο Δ ,για την οποία ισχύει ότι $3^{f(2)}=2^{f(3)}$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ ώστε $\xi f'(\xi)ln\xi-f(\xi)=0$

75. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta=(1,+\infty)\to(1,+\infty)$ παραγωγίσιμη στο Δ , με $f'(x)\neq 0$ και $f(\mathrm{e})\ln f(\mathrm{e}^2)=f(\mathrm{e}^2)\ln f(\mathrm{e})$.

Να αποδείξετε ότι : Υπάρχει $\xi\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$, ώστε $f(\xi)=\mathrm{e}$

76. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta=(0,+\infty)\to(1,+\infty)$ παραγωγίσιμη στο Δ , με $(f^2(x))'\neq 0$ και $f(2)\ln f(1)=f(1)\ln f(2)$.

Να αποδείξετε ότι : Υπάρχει $\xi\in(1,2)$, ώστε $f(\xi)=\mathrm{e}^{\sqrt{f(\xi)}}$

77. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}$ $\infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι : $\ln f(0)+f'(0)=\ln f(1)+f'(1)$.

Να αποδείξετε ότι : Υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε $f'(\xi)+f(\xi)f''(\xi)=0$

78. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $[-1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,5)$,για την οποία ισχύει ότι : $f(-1)<f(5)<f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,5)$ ώστε $f'(\xi)=0$

79. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$,για την οποία ισχύει ότι : $f(5)<f(1)<f(3)$. Να αποδείξετε ότι: Η εξίσωση $f'(x)=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,5)$.

80. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$,για την οποία ισχύει ότι : $(f(5)-f(1))(f(1)-f(3))<0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ευθεία $(\varepsilon)//x'x$ η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

81. **Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(x+1)f'(x) \neq x+2$ ακόμα ισχύει $-1 < f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$**
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x + ln(x+1) - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα

82. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ισχύει ότι
$f'(x) + \eta\mu x \neq 0$ ακόμα ισχύει $-1 < f(x) < 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

83. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $f'(x) \neq \ln x + 1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, αν $0 < f(x) < \mathrm{e}$, τότε να αποδείξετε ότι
Η εξίσωση $f(x) = x\ln x$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,\mathrm{e})$

84. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$, για την οποία ισχύει $f(\mathrm{e})(\mathrm{e} + f(\mathrm{e})) < 0$ και $f(x)(\ln x + 1) \neq xf'(x)\ln x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\ln x + f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,\mathrm{e})$

85. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $0 < f(x) + 1 < \mathrm{e}$, για την οποία ισχύει $f'(x) \neq (x+1)\mathrm{e}^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x\mathrm{e}^x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$

86. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$, για την οποία ισχύουν $f(1)(\mathrm{e} + f(\mathrm{e})) < 0$ και $f'(x) + 1 + \ln x \neq 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x\ln x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,\mathrm{e})$

87. **Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[-2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,3)$,για την οποία ισχύει ότι : $-4 < f(x) < 11$ και $f'(x) \neq -3$. Να αποδείξετε ότι:**
Η εξίσωση $f(x) = -3x + 5$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(-2,3)$

88. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[-1,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,3)$,για την οποία ισχύει ότι : $1 < f(x) < 13$ και $f'(x) \neq 3$. Να αποδείξετε ότι: Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x + 4$, έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

89. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$,για την οποία ισχύει ότι : $7 < f(x) < 15$ και $f'(x) \neq 2$. Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει μοναδικό $\rho \in (1,5)$ ώστε $f(\rho) - 5 = 2\rho$

90. **Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι**
$f''(x) \neq 2 - e^{x}$ και $f(0) - f(1) = e - 2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$f'(x) = 2x - e^{x}$ έχει ακριβώς μια ρίζα

91. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύει ότι
$f''(x) + \eta\mu x \neq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \frac{\pi}{2} + 1$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ

92. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι
$f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και . $f(1) + e = f(e)$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \ln x + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1, e)$

93. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει ότι
$x^2 f''(x)\ln x + 2xf'(x) \neq f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και . $f(e) = 2f(e^2)$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x f'(x)\ln x + f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (e, e^2)

94. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι
$(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) \neq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και . $\sqrt{2}f(0) = f(1)$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x^2 + 1)f'(x) = xf(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$

95. **Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$ και τα σημεία της γραφικής της παράστασης $A(-1,-2)$, $B(5,3)$ και σημείο $\Sigma(x_\Sigma, \kappa)$ της ευθείας AB με $x_\Sigma \notin (1,5)$. Να αποδείξετε ότι: Υπάρχει ευθεία (ε), η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτηση f και διέρχεται από το $\Sigma(x_\Sigma, \kappa)$**

96. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[-1,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,3)$ και τα σημεία της γραφικής της παράστασης $A(-1,1)$, $B(3,3)$ και το σημείο $\Sigma(5,4)$. Να αποδείξετε ότι

1. Τα σημεία A, B, Σ είναι συνευθειακά.

2. Υπάρχει ευθεία (ε), η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτηση f και διέρχεται από το $\Sigma(5,4)$

97. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3 + i \cdot f(1)$, $z_2 = 4 + i \cdot f(3)$ και $z_3 = -1 + \kappa \cdot i$, $\kappa > 0$.
Αν $|z_1| = |z_2| = 5$ και οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι σημεία συνευθειακά, τότε

1 Να αποδείξετε ότι $|f(1) + f(3)| = 7$

2 Να βρείτε τον μιγαδικό $z_3 = -1 + \kappa \cdot i$

3 Να αποδείξετε ότι : Υπάρχει ευθεία (ε), η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτηση f και διέρχεται από την εικόνα του z_3

98. **Αν η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$,έχει τρεις πραγματικές ρίζες διαφορετικές ανά δύο ,να αποδείξετε ότι $\beta^2>3\alpha\gamma$**

99. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2-\sigma\upsilon\nu x=0$,έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\left[-\pi,\pi\right]$

100. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^3-3x-7+\mathrm{e}^{3+x}=0$,έχει το πολύ τρεις ρίζες.

101. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1=0$,έχει μοναδική ρίζα το 0

102. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,αν η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τρία σημεία , με τετμημένες x_1,x_2,x_3 και $x_1<x_2<x_3$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ευθεία $(\varepsilon)//x'x$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f'

103. Η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$, με $\alpha>0$ και $\beta<4\alpha\gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία , με τετμημένες x_1,x_2 και $x_1<x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε $\alpha\xi^2<\gamma$

104. Η συνάρτηση f με $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x^2-\beta x-\gamma}-\alpha x^2-\beta x-\gamma$, με $\alpha>0$, τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τέσσερα σημεία , με τετμημένες x_1,x_2,x_3,x_4 και $x_1<x_2<x_3<x_4$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $2\alpha\xi+\beta=0$.

105. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οι ευθείες $(\varepsilon),(\eta)$ οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων και εφάπτονται στη γραφική παράσταση C_f στα σημεία της με τετμημένες ξ_1,ξ_2 αντίστοιχα . Αν η ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60^0 και η ευθεία (η) σχηματίζει γωνία 30^0, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $(\xi_2-\xi_1)f''(\xi)=\sqrt{3}-1$

106. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $f(-1)=2$.

(α) Να βρείτε το $f(0)$

(β) Να βρείτε το $f(1)$.

Να αποδείξετε ότι

(γ) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(0)=-2\xi$

(δ) $\xi=1/2$

(ε) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

107. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $f(-1)=0$.

α. Να βρείτε το $f(0)$

β. Να βρείτε το $f(1)$.

Να αποδείξετε ότι

γ. Η f είναι περιττή

δ. Υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f''(0)=-6\xi$

ε. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

108. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1$. Αν $f(-1)=1$, τότε

α. Να βρείτε το $f(0)$

β. Να βρείτε το $f(1)$.

Να αποδείξετε ότι

γ. Υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f''(0)=-6\xi$

δ. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.